



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

UNICAMP - FEEC - DMO, CAMPINAS - SP, C.P. 6101, CEP. 13083-970

Modelagem Numérica de Guias Planares Magnetoópticos

Tese de Mestrado

Autor: Luciano Prado de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Campinas
Fevereiro, 2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4m Oliveira, Luciano Prado de Oliveira
Modelagem numérica de guias planares
magnetoópticos / Luciano Prado de Oliveira. — Campinas,
SP: [s.n], 2004.

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Ótica Integrada 2. Método dos elementos finitos. 3.
Anisotropia. 4. Faraday, Efeito de. I. Hernández
Figueroa. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III.
Título.



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDAS E ÓPTICA

UNICAMP - FEEC - DMO, CAMPINAS - SP, C.P. 6101, CEP. 13083-970

Modelagem Numérica de Guias Planares Magnetoópticos

Tese de Mestrado

Autor: Luciano Prado de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Banca Examinadora

DR. HUGO ENRIQUE HERNÁNDEZ FIGUEROA

FECC/UNICAMP - PRESIDENTE

DR. RICARDO ANTONIO DE SIMONE ZANON

CCT/UDESC

DR. RUI FRAGASSI SOUZA

FEEC/UNICAMP

DR. COSME EUSTÁQUIO RUBIO MERCEDES

FEEC/UNICAMP

Campinas
Fevereiro, 2004

Resumo

Este trabalho apresenta um modelamento numérico original, baseado no método dos elementos finitos, com objetivo de analisar as propriedades espectrais de guias fotônicos definidos sobre meios periódicos, anisotrópicos e planares e que apresentam bandas fotônicas proibidas – as PBGS (photonic band gaps structures).

A formulação é expressa em termos das componentes transversais do campo magnético, permitindo investigar o acoplamento dos modos TE e TM em estruturas magnetoópticas estratificadas. Os algoritmos, baseados no método dos elementos finitos, foram desenvolvidos no domínio da frequência e permitem a análise de estruturas unidimensionais com índices de refração arbitrários.

São investigadas as influências da arquitetura e da composição do material sobre a resposta espectral da estrutura, caracterizada pela rotação Faraday e pelo coeficiente de transmissão.

Diversas configurações são analisadas, com o objetivos de determinar aquela que ofereça a melhor resposta em termos de transmissividade e efeito magnetoóptico. Também, são discutidos os desvios introduzidos na resposta espectral do sistema em virtude de possíveis erros na fabricação das máscaras de deposição dos materiais.

Abstract

This work shows an original numerical model, based on the finites elements method, with the aim of analysing espectral properties of photonic waveguides defined on anisotropic and periodic structures which show forbidden photonic bands.

The formulation is expressed in terms of transversal components of the magnetic field, so that the coupling of TE and TM modes in periodical magneto-optical structures can be investigated. The algorithms based on the finites elements method were developed in the frequency domain and they make possible the analysis of unidimensional structures with arbitrary refraction index.

The influences of architecture and of the material, on the structure spectral response, are analysed. They are characterized by the Faraday rotation and by the coefficient of transmission.

Many configurations are analysed to determine the one which offers the best response in terms of transmissivity and in magneto-optic effect. The deviation of the reponses, caused by errors in the manufacturing process of the deposition masks, are also discussed.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Hugo Enrique Hernández Figueroa pela orientação, confiança e apoio oferecido para a conclusão deste mestrado.

Também gostaria de agradecer ao Professor Atílio José Giarola, por sua generosidade e confiança no meu trabalho.

Ao meu amigo João Socas, por seu apoio, incentivo, infinito otimismo e valiosos ensinamentos.

À minha amiga Regina, que me apresentou à UNICAMP e sempre me prestigiou com sua amizade e confiança.

Ao Júlio e Ricardo, pelo privilégio de suas amizades.

À Maitê, por sua generosa amizade.

À minha avó Edith e minha irmã Fabiane, pelo apoio incondicional.

Aos amigos Nadir, Fragalli, Luiz, Mezaroba, Joelma, Léo, Joselito, Carol, Batschauer, Nivaldo, Stefano, pelos ótimos momentos.

Ao professor Antonio Frasson por sua generosa ajuda.

Aos amigos e colegas do Departamento de Microonda e Óptica.

Aos amigos e colegas do Departamento de Engenharia Elétrica/UDESC.

À música do mestre Pixinguinha, sempre tão inovadora, reveladora e emocionante.

Dedico este trabalho aos meus pais Antonio e Arlete, fontes de apoio e confiança, demonstrando em todos os momentos a incondicionalidade do amor.

"... o mais importante e bonito, do mundo, é isto: que as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas — mas que elas vão sempre mudando. Afinam ou desafinam. Verdade maior. É o que a vida me ensinou. Isto me alegra, montão ..."

João Guimarães Rosa

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Objetivos e organização do trabalho	2
2	Materiais Magnetoópticos e Elementos Finitos	4
2.1	Introdução	4
2.2	Materiais magnetoópticos	4
2.2.1	Propagação da luz em materiais magnetoópticos	7
2.2.2	Efeito Faraday	8
2.3	Método dos elementos finitos	11
2.3.1	Problemas de contorno	11
2.3.2	O método dos elementos finitos	14
3	Modelamento Matemático do Guia Anisotrópico	18
3.1	Introdução	18
3.2	Equações da onda em coordenadas cartesianas generalizadas	18
3.3	Equações da onda para o guia unidimensional	24
3.4	Discretização da equação de onda pelo método de Galerkin	27
3.5	Condições de contorno	31
4	Estrutura Anisotrópica Estratificada	38
4.1	Introdução	38
4.2	Modelo da estrutura multicamadas	39
4.3	Parâmetros analisados	41
4.4	Influência da descontinuidade na resposta do cristal	42
4.5	Resultados	42
4.5.1	Sistemas com uma descontinuidade	44
4.5.2	Sistemas com duas descontinuidades	46
4.5.3	Sistemas com três ou mais descontinuidades	48
4.6	Conclusão	57

5	Conclusões	58
	Referências	60
A	Relação entre os Campos Elétrico e Magnético	64
B	Caracterização dos Campos nas Regiões Anterior e Posterior	66
B.1	Campos na Região Anterior ($z < 0$)	66
B.2	Campos na Região Posterior ($z > L$)	69

Lista de Figuras

2-1	Ilustração esquemática do controle de modos ópticos guiados.	5
2-2	Representação da aplicação do campo magnético H_{DC} em um guia de ondas com material magnetoóptico. Campo magnético H_{DC} aplicado segundo a direção de propagação da onda.	6
2-3	Rotação do plano de polarização da luz transmitida em um meio magnetoóptico magnetizado: (a) luz transmitida; (b) luz refletida.	9
2-4	Configuração básica de um isolador óptico.	10
2-5	Domínio unidimensional subdividido em M elementos lineares. (a) elementos e nós globais. (b) e -ésimo elemento linear com a respectiva numeração local.	15
2-6	Funções de base lineares em um domínio unidimensional.	15
3-1	Ilustração de uma estrutura planar óptica.	19
3-2	Ilustração de um guia unidimensional.	24
3-3	Ilustração do guia anisotrópico de característica dielétrica $\bar{\epsilon}_2(z)$ e envolvido pelos meios $\bar{\epsilon}_1(z)$ e $\bar{\epsilon}_3(z)$	32
4-1	Representação esquemática unidimensional do arranjo laminar de cristais fotônicos com múltiplas descontinuidades. A figura mostra uma estrutura com duas descontinuidades, arranjada segundo a ordem $(NM)^3(MN)^4(NM)^3$	39
4-2	Modelo de funcionamento da estrutura multicamadas com características de bandas fotônicas proibidas (PGB).	40
4-3	Campos eletromagnéticos dos modos que compõem a luz incidente: (a) modo TE; (b) modo TM.	41
4-4	Distribuição do campo magnético ao longo da região estratificada. Estrutura com uma descontinuidade versus estrutura sem descontinuidade.	43
4-5	Resposta de uma grade magnetoóptica simétrica com uma descontinuidade - $(NM)^{17}(MN)^{17}$. Separação das contribuições das ondas circularmente polarizadas à direita (T_+ , θ_+) e à esquerda (T_- , θ_-).	43
4-6	Resposta de uma grade magnetoóptica simétrica com uma descontinuidade - $(NM)^{17}(MN)^{17}$. Efeito total sobre a luz linearmente polarizada.	44

4-7	Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{17}(MN)^{17}$	45
4-8	Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{22}(MN)^{22}$	45
4-9	Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{25}(MN)^{25}$	46
4-10	Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para células GGG/Ce-YIG. Comparação das estruturas $(NM)^{17}(MN)^{17}$, $(NM)^{17}(MN)^{18}$ e $(NM)^{17}(MN)^{25}$	47
4-11	Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para células GGG/Bi-YIG. Comparação entre as estruturas $(NM)^{17}(MN)^{17}$, $(NM)^{17}(MN)^{18}$ e $(NM)^{17}(MN)^{25}$	47
4-12	Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetros a e b são variados, mantendo $f = 2$	48
4-13	Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetros a e b são variados, mantendo $f = 2$	49
4-14	Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetro a é variado, para $b = 31$	49
4-15	Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetro a é variado, para $b = 31$	50
4-16	Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetro b é variado, para $a = 17$	50
4-17	Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$ — parâmetro b é variado, para $a = 17$	51
4-18	Comparação da resposta espectral entre estruturas com duas e três descontinuidades, mantendo constante o parâmetro f	51
4-19	Análise da influência do parâmetro $f = b/a$ na resposta espectral da estrutura com três descontinuidades.	52
4-20	Análise da influência do número de células na resposta espectral da estrutura com três descontinuidades.	53
4-21	Efeito provocado pela assimetria. Estrutura $NM^{14}(MN)^{29}(NM)^{29}(MN)^{14}$ alterada para $(NM)^{14}(MN)^{28}(NM)^{29}(MN)^{14}$	53
4-22	Efeito provocado pela assimetria. Estrutura $(NM)^{14}(MN)^{30}(NM)^{30}(MN)^{14}$ alterada para $(NM)^{14}(MN)^{28}(NM)^{30}(MN)^{14}$	54
4-23	Comparação da resposta espectral de uma estrutura com três e quatro descontinuidades.	54
4-24	Variação do parâmetro f_1 em uma estrutura com quatro descontinuidades.	55
4-25	Variação do parâmetro f_2 em uma estrutura com quatro descontinuidades.	55
4-26	Variação da transmitância (curva cheia) e da rotação Faraday (curva pontilhada) em função do erro percentual da espessura da lâminas que compõem a célula.	56

4-27	Efeito da variação da espessura das lâminas sobre a resposta espectral do sistema de quatro descontinuidades.	57
B-1	Onda linearmente polarizada composta de duas ondas circularmente polarizadas. . . .	66

Lista de Tabelas

2.1	Classificação do controle de modos ópticos guiados.	5
2.2	Configurações para o tensor $\overline{\epsilon}_r$, conforme a aplicação do campo H_{DC}	6

Lista de Símbolos

$\overline{\epsilon}_r$	Tensor permissividade elétrica do meio anisotrópico.
$\overline{\mu}_r$	Tensor permeabilidade magnética do meio anisotrópico.
ϵ_{\perp}	Permissividade elétrica perpendicular à direção de propagação da luz.
ϵ_{\parallel}	Permissividade elétrica paralela à direção de propagação da luz.
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo.
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo.
δ	Efeito magnetoóptico de primeira ordem.
j	Constante complexa de valor $\sqrt{-1}$.
E_x, E_y	Componentes transversais do campo elétrico \mathbf{E} para a luz que se propaga no meio anisotrópico.
D_x, D_y	Componentes transversais da densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} para a luz que se propaga no meio anisotrópico.
\hat{x}, \hat{y}	Vetores unitários nas direções x e y , respectivamente.
x, y, z	Coordenadas do sistema cartesiano.
β^+	Constante de propagação da luz circularmente polarizada à direita.
β^-	Constante de propagação da luz circularmente polarizada à esquerda.
ϵ^+	Permissividade efetiva para a onda circularmente polarizada à direita.
ϵ^-	Permissividade efetiva para a onda circularmente polarizada à esquerda.
c_0	Velocidade da luz no vácuo.
ω	Frequência angular de operação.
ψ_x, ψ_y	Ângulos de fase dos campos elétricos E_x e E_y , respectivamente.
E_0	Amplitude do campo elétrico.
t	Coordenada do sistema tempo.
L	Comprimento total da grade magnetoóptica.
θ	Ângulo de rotação Faraday.
\mathbf{M}	Vetor magnetização.
ϕ	Função solução da equação diferencial.
f	Função excitação da equação diferencial.

\mathcal{L}	Operador diferencial.
ψ	Função complexa.
Ω	Domínio espacial de solução ou janela computacional.
$\tilde{\phi}, \tilde{\phi}(z)$	Solução aproximada da equação diferencial.
$\phi, \phi(z)$	Solução exata da equação diferencial.
$c_J, [c]$	Coefficientes a serem determinados.
$v_J, [v]$	Funções que formam uma base ortogonal.
N	Número de pontos sobre o domínio Ω .
I, J	Números inteiros positivos.
w	Função-peso.
λ	Comprimento de onda.
x_1^e, x_2^e	Primeiro e segundo nós locais, respectivamente.
z_0, z_f	Pontos inicial e final do domínio unidimensional, respectivamente.
π	Relação entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.
a^e, b^e	Constantes a serem determinadas.
z_1^e, z_2^e	Primeiro e segundo nó local no e -ésimo elementos finito.
M	Número total de elementos finitos no domínio Ω .
l^e	Comprimento do e -ésimo elementos finito.
$N_1^e(z), N_2^e(z)$	Funções de forma.
i, j, k	Coordenadas do sistema generalizado.
\mathbf{e}, \mathbf{h}	Campos elétrico e magnético instantâneos.
Γ	Fronteira que limita o domínio Ω .
$\overset{=}{\theta}_r$	Tensor inverso ao tensor permeabilidade magnética.
$\overset{=}{\phi}_r$	Tensor inverso ao tensor permissividade elétrica.
$\overset{=}{\xi}_r, \overset{=}{\zeta}_r$	Tensores que caracterizam, genericamente, o meio de propagação.
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vetores unitários nas direções i, j e k , respectivamente.
\mathbf{f}	Campo vetorial generalizado.
$\mathbf{f}_T, \mathbf{f}_k$	Componentes transversal e longitudinal do campo vetorial \mathbf{f} .
∇_T	Operador nabla transversal à direção de propagação.
$\zeta'_{ij}, \zeta'_{ji}, \overset{=}{\zeta}_T$	Vetores que caracterizam o meio.
$\overset{=}{\xi}_T$	Vetor que caracterizam o meio, transversal à direção de propagação.
h_i, h_j, h_k	Componentes do campo magnético em coordenadas generalizadas.
κ_0	Número de onda no vácuo.
H_i, H_k	Componentes fasoriais do campo magnético em coordenadas generalizadas.
$\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{yx}, \phi_{xy}$	Componentes transversais do tensor $\overset{=}{\phi}_r$.

H_x, H_y	Componentes fasoriais do campo magnético em coordenadas cartesianas.
N_J, N_I	Funções que formam uma base ortogonal.
H_x^e, H_y^e	Componentes campo magnético no e -ésimo elemento finito.
a_x^e, a_y^e	Coefficientes a serem determinados no e -ésimo elemento finito.
$[g_x], [g_y]$	Vetores definidos pelas condições de contorno.
$\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3$	Tensores permissividade elétrica dos meios 1, 2 e 3, respectivamente.
$\mathbf{E}_1^i, \mathbf{H}_1^i$	Campos elétrico e magnético incidentes, a partir do meio 1.
$\mathbf{E}_1^r, \mathbf{H}_1^r$	Campos elétrico e magnético refletidos para o meio 1.
$\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$	Campos elétrico e magnético no meio 2.
$\mathbf{E}_3, \mathbf{H}_3$	Campos elétrico e magnético no meio 3.
$\mathbb{K}_{xx}, \mathbb{K}_{xy}, \mathbb{K}_{yx}, \mathbb{K}_{yy}$	Matrizes definidas pelas característica do meio e pela funções de forma.
\mathbf{e}_{\parallel}	Campo elétrico tangencial à fronteira.
$\phi_r^{=1}, \phi_r^{=2}, \phi_r^{=3}$	Inverso do tensor permissividade relativa para os meios 1, 2 e 3, respectivamente.
H_x^1, H_y^1	Componentes transversais dos tensores campo magnético para o meio 1.
H_x^2, H_y^2	Componentes transversais dos tensores campo magnético para o meio 2.
H_x^3, H_y^3	Componentes transversais dos tensores campo magnético para o meio 3.
$\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \Gamma_3^0, \Gamma_4^0$	Coefficientes na fronteira inicial, a partir das características elétricas dos meios 1 e 2.
$\Gamma_1^L, \Gamma_2^L, \Gamma_3^L, \Gamma_4^L$	Coefficientes na fronteira final, a partir das características elétricas dos meios 2 e 3.
Δ^0, Δ^L	Coefficientes definido a partir das características elétricas do meio nas fronteiras inicial e final, respectivamente.
$H_x(z), H_y(z)$	Componentes transversais do campo magnético no interior da grade.
$P_y^0, P_x^0, P_y^L, P_x^L$	Coefficientes componentes do vetor $[g_x]$.
$Q_y^0, Q_x^0, Q_y^L, Q_x^L$	Coefficientes componentes do vetor $[g_y]$.
γ_1^+, γ_1^-	Constantes de propagação, no meio 1, para as ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda, respectivamente.
γ_3^+, γ_3^-	Constantes de propagação, no meio 3, para as ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda, respectivamente.
$\Delta\gamma_1^+$	Adição das constantes de propagação do meio 1.
$\Delta\gamma_1^-$	Diferença das constantes de propagação do meio 1.
$\Delta\gamma_3^+$	Adição das constantes de propagação do meio 3.
$\Delta\gamma_3^-$	Diferença das constantes de propagação do meio 3.
$(NM), (MN)$	Células magnetoópticas.

d	Espessura da célula magnetoóptica.
d_N	Espessura da lâmina isotrópica que compõem a célula magnetoóptica.
d_M	Espessura da lâmina anisotrópica que compõem a célula magnetoóptica.
Δd_M	Variação na espessura da lâmina anisotrópica.
λ_0	Comprimento de onda central de operação.
ϵ_N	Permissividade elétrica do material isotrópico.
$\overline{\epsilon}_M$	Permissividade elétrica do material anisotrópico.
$T(\lambda)$	Transmitância da estrutura.
$T_+(\lambda), T_-(\lambda)$	Transmistâncias para as ondas circularmente polarizadas, à direita e a esquerda, respectivamente.
$\theta_+(\lambda), \theta_-(\lambda)$	Rotação Faraday para as ondas circularmente polarizadas, à direita e a esquerda, respectivamente.
$a_{xN}(\lambda), a_{yN}(\lambda)$	Amplitudes dos campos magnéticos no contorno final da grade.
f, f_1, f_2	Parâmetros que relacionam o número de lâminas que compõem cada seção da grade magnetoóptica.
a, b, c	Números inteiros que definem o número de células em cada seção da grade magnetoóptica.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Poucas vezes a história da tecnologia registrou uma variedade de inovações como as experimentadas nos últimos anos pelo setor das telecomunicações. Beneficiado por novos e revolucionários serviços, o mercado consumidor continua pressionando este setor para o desenvolvimento e implantação de redes de comunicação mais rápidas. Cada vez mais freqüente, a ampliação das taxas de transmissão tem sido possível graças aos sistemas ópticos de comunicação, cuja principal característica é a transmissão de sinais com baixas perdas e em uma ampla faixa de freqüência.

Para suportar taxas de transmissão tão elevadas, as redes de comunicação totalmente ópticas estão se tornando a meta tecnológica mais ambiciosa. Nessas redes, a comutação não dependerá de equipamentos eletrônicos, principalmente considerando que as taxas de transmissão de sinais ópticos já romperam a barreira dos terabit/segundo, utilizando técnicas como a multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM) [1] – [4], a tecnologia mais promissora para permitir o aumento das taxas de transmissão de sinais. Além disso, novas técnicas de comutação e transmissão, como a denominada “modo de transferência assíncrona (ATM)”, deverão tratar, independentemente de sua natureza, os sinais de áudio, vídeo e dados. Assim, para que em um futuro próximo, as redes de comunicação possam ser totalmente ópticas e transparentes, grandes esforços têm sido concentrados no desenvolvimento de componentes que possam viabilizá-las. Com este objetivo, um diversificado conjunto de dispositivos ativos e passivos têm sido propostos, analisados e fabricados. Esses dispositivos, tais como lasers, fotodetectores, amplificadores, acopladores, chaves, moduladores, filtros, etc., fazem uso das mais diversas propriedades dos materiais, como a isotropia, a anisotropia e a não-linearidade. Dentre estes, aqueles que se utilizam das propriedades magnetoópticas dos materiais se constituem em uma importante classe, compreendendo os dispositivos não-recíprocos, como isoladores, circuladores e os moduladores que fazem uso da célula de Bragg.

Os dispositivos não-recíprocos, que já foram amplamente analisados e utilizados na faixa de microondas e ondas milimétricas, hoje desempenham um importante papel para a tecnologia de comunicações ópticas. Inseridos nessa categoria, os circuladores fazem parte dos derivadores de sinais em

sistemas que utilizam modulação WDM [11, 10]. Já os isoladores são utilizados para proteger fontes ópticas da luz refletida e estão presentes nos modernos sistemas de amplificação óptica [5] – [11]. Tais dispositivos podem ser construídos sob a forma de óptica integrada, permitindo seu acoplamento a sistemas com fibras ópticas.

O dispositivo isolador mais simples de ser construído consiste de um seção de guia que proporciona uma rotação de 45 graus no plano de polarização da luz. Esta seção é colocada entre dois polarizadores, dispostos de tal maneira que um ângulo de 45 graus seja formado entre eles. Uma das formas de realizar a rotação no plano de polarização da luz, explora o fenômeno de acoplamento entre os modos TE e TM em um dispositivo magnetoóptico. Como será discutido nos capítulos posteriores, através de um controle adequado, é possível induzir, em um guia anisotrópico, propriedades de acoplamento entre os modos transversais e, assim, possibilitar rotação do plano de polarização da luz e a conseqüente conversão entre os modos TE e TM; este efeito é conhecido como “rotação Faraday”. Para que um dispositivo construído de um único bloco de material magnetoóptico proporcione a rotação de 45 graus, ideal para aplicação em isoladores ópticos, suas dimensões devem ser da ordem de um milímetro. Entretanto, as perdas por difração, em dispositivos com tais dimensões, tornam sua utilização proibitiva [13].

Recentemente, vários pesquisadores demonstraram o aumento da rotação Faraday em dispositivos magnetoópticos estratificados [15, 16, 17]. Contudo, este aumento da rotação Faraday estava associado a um coeficiente de transmissão extremamente baixo, o que inviabilizava a aplicação prática de tais dispositivos. Desde então, um grande esforço tem sido despendido na elaboração de uma estrutura que, ao mesmo tempo, forneça alta transmissão e uma rotação Faraday da ordem de 45 graus [18, 20]. Contudo, em virtude do grande número de parâmetros envolvidos no projeto de tais estruturas, esta não é uma tarefa trivial.

1.2 Objetivos e organização do trabalho

O objetivo deste trabalho é analisar as características espectrais de grades anisotrópicas magnetoópticas que apresentam bandas fotônicas proibidas. A partir das propostas feitas por Sakaguchi e Sugimoto [17] e Levy *et al.* [20], o comportamento seletivo em frequência das estruturas será analisado, em termos do efeito de rotação Faraday e da transmitância, para diversas configurações construtivas. Contudo, ao contrário das técnicas semi-analíticas, utilizadas por Sakaguti [17] e Levy [20], este trabalho utiliza uma plataforma computacional, desenvolvida em linguagem de programação Fortran. Este código, baseado no método dos elementos finitos, oferece precisão, flexibilidade e otimização dos recursos computacionais disponíveis.

No Capítulo 2 será realizada uma revisão bibliográfica, focalizando os fundamentos físico-matemáticos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. Nele será apresentada a definição e as principais propriedades dos materiais anisotrópicos. Será analisada a propagação da luz em meios contínuos, e se definirá uma das principais características da propagação em meios magnetoópticos –

o efeito Faraday, surgido do acoplamento entre os modos TE e TM. Também serão expostos, de forma sucinta, os fundamentos da ferramenta numérica utilizada na solução da equação de onda, o método dos elementos finitos.

No Capítulo 3 se apresentará o modelamento matemático que dá suporte ao estudo das estruturas fotônicas propostas, como, também, uma dedução detalhada, não disponível na literatura, das equações que governam a propagação da onda eletromagnética em domínios anisotrópicos. Nesta dedução, a equação de onda será decomposta em termos das componentes transversal e longitudinal à direção de propagação, resultando em um sistema de equações acopladas através das componentes transversais do campo magnético. A este sistema de equações será aplicado o método dos elementos finitos que, juntamente com as condições de contorno entre fronteiras anisotrópicas, dará origem a um sistema numérico de equações acopladas, cuja implementação computacional deu origem a uma plataforma que se constitui na ferramenta fundamental desta tese.

No Capítulo 4 serão apresentados os resultados numéricos do comportamento seletivo em frequência das grades magnetoópticas e é investigada a influência da arquitetura e da composição do material sobre a resposta espectral de tais estruturas. Além disso, serão discutidos os desvios provocados, na resposta do sistema, devido a erros na fabricação das máscaras de deposição.

Por fim, no Capítulo 5 serão apresentadas as conclusões a respeito dos resultados aqui obtidos, bem como sugestões para trabalhos futuros que envolvam grades magnetoópticas.

Capítulo 2

Materiais Magnetoópticos e Elementos Finitos

2.1 Introdução

Este Capítulo tem como finalidade apresentar uma revisão bibliográfica focalizando os fundamentos físico-matemáticos utilizados neste trabalho. É apresentada uma revisão sobre as principais características dos materiais magnetoópticos, seguida dos fundamentos da ferramenta matemática utilizada para cálculo das estruturas unidimensionais propostas nesta tese – o método dos elementos finitos.

2.2 Materiais magnetoópticos

Uma variedade de dispositivos vem sendo propostos utilizando o controle de ondas guiadas por meio de sinais externos. O objetivo deste controle é implementar dispositivos funcionais para sistemas ópticos de comunicação e para processamento de sinais. A Figura 2-1 mostra o esquema de controle da onda guiada, onde o modo guiado pode experimentar, por meio de um sinal elétrico/óptico externamente aplicado, modulação de amplitude, modulação de fase, rotação de polarização, deslocamento de frequência ou mudança de sua trajetória.

Os métodos para controle de modos guiados são classificados segundo os mecanismos de interação entre os sinais externos aplicados e os modos guiados, conforme mostra a Tabela 2.1. Os sinais externos aplicados para controle são, usualmente, elétricos ou magnéticos, contudo podem ser: de pressão, químico, elétrico, magnético, etc. Cada interação é acompanhada de um fenômeno físico distinto que induz uma mudança no índice de refração do guia de ondas. Os fenômenos normalmente utilizados no controle de ondas guiadas são os de efeito eletroóptico, acustoóptico, magnetoóptico, termoóptico e não-linear. Todos os efeitos, a exceção do efeito termoóptico, estão fortemente relacionados com a anisotropia dos cristais utilizados como substrato, nos quais as constantes físicas são representadas por tensores. Este trabalho investiga características de propagação dos modos ópticos em estruturas

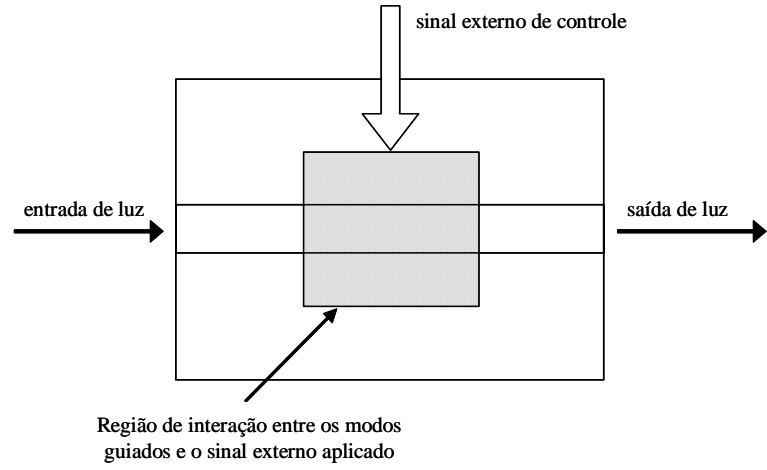


Figura 2-1: Ilustração esquemática do controle de modos ópticos guiados.

que se utilizam do efeito magnetoóptico.

Interação	Efeito	Fenômeno
campo elétrico e luz	eletroóptico	mudança no índice de refração
onda sonora e luz	acustoóptico	mudança no índice de refração
campo magnético e luz	magnetoóptico	rotação da polarização
calor e luz	termoóptico	mudança no índice de refração
luz e luz	não-linear de segunda ordem	mudança no índice de refração de acordo com a intensidade do campo externo aplicado

Tabela 2.1: Classificação do controle de modos ópticos guiados.

Os efeitos eletro e acustoópticos são fenômenos recíprocos, pois as propriedades ópticas desses cristais são independentes da direção de propagação da luz. O tensor dielétrico, $\bar{\epsilon}_r$, que caracteriza os cristais simétricos recíprocos é definido por:

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde os elementos ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z são as permissividades relativas nas direções x , y e z , respectivamente. Os dispositivos não-recíprocos, como isoladores e circuladores, podem ser implementados usando os efeitos magnetoópticos encontrados em materiais magnéticos; um isolador óptico, por exemplo, é necessário para manter estável o processo de geração de luz em lasers evitando a influência de luz refletida para a fonte laser [12].

Os materiais magnetoópticos são essencialmente isotrópicos na ausência de um campo magnético externo. Quando o material é magnetizado por um campo magnético DC, aplicado externamente ao

longo da direção z , como mostra a Figura 2-2, o tensor permissividade relativa, $\bar{\bar{\epsilon}}_r$, torna-se assimétrico e pode ser expresso como

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_x & j\delta & 0 \\ -j\delta & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde δ representa o efeito magnetoóptico de primeira ordem, responsável pela natureza não-recíproca de propagação da luz. Além disso, a permeabilidade relativa é unitária, isto é, $\mu_r = 1$, pois a dependência temporal da magnetização é desprezível na faixa de frequência da luz [12].

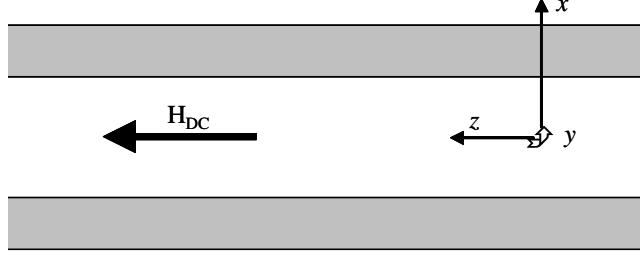


Figura 2-2: Representação da aplicação do campo magnético H_{DC} em um guia de ondas com material magnetoóptico. Campo magnético H_{DC} aplicado segundo a direção de propagação da onda.

As configurações para o tensor permissividade relativa são apresentadas na Tabela 2.2, dependendo da aplicação do campo magnético DC.

Direção do campo H_{DC}	$\bar{\bar{\epsilon}}_r$
x	$\begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & j\delta \\ 0 & -j\delta & \epsilon_z \end{bmatrix}$
y	$\begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & j\delta \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ -j\delta & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$
z	$\begin{bmatrix} \epsilon_x & j\delta & 0 \\ -j\delta & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$

Tabela 2.2: Configurações para o tensor $\bar{\bar{\epsilon}}_r$, conforme a aplicação do campo H_{DC} .

A natureza não dissipativa do material magnetoóptico está implícita na característica hermitiana do tensor $\bar{\bar{\epsilon}}_r^+ = \bar{\bar{\epsilon}}_r^{*T}$, onde os símbolos $(+, *, T)$ denotam, respectivamente, as transformações adjuntas, complexo conjugado e transposição matricial. O material aqui considerado possui simetria cilíndrica com relação ao eixo girotrópico que, no caso da equação (2.2), corresponde ao eixo z . Tal simetria

implica que os dois primeiros termos da diagonal principal da equação (2.2) são iguais. Assim, o tensor $\bar{\bar{\epsilon}}_r$, que define o meio magnetoóptico, pode ser escrito como

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} & j\delta & 0 \\ -j\delta & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.2.1 Propagação da luz em materiais magnetoópticos

Quando luz se propaga ao longo da direção z , paralelamente ao vetor magnetização \mathbf{M} , duas ondas ortogonais circularmente polarizadas existem como modos naturais: ondas circularmente com polarizações positiva e negativa, cujos vetores campo magnético giram nos sentidos horário e anti-horário, respectivamente, com relação ao sentido de propagação; a primeira será denotada por \mathbf{E}^+ e a segunda por \mathbf{E}^- . O campo elétrico da onda circularmente polarizada pode ser decomposto, com relação aos eixos x e y , nas componentes de campo E_x e E_y , de modo que tais componentes possuem amplitudes iguais e uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Assim, no plano complexo $x - y$, o campo elétrico das ondas circularmente polarizadas podem ser escritos como

$$\mathbf{E}^{\pm} = E_x \hat{x} \pm j E_y \hat{y}, \quad (2.4)$$

e, portanto,

$$\mathbf{D}^{\pm} = D_x \hat{x} \pm j D_y \hat{y}, \quad (2.5)$$

onde \hat{x} e \hat{y} indicam os vetores unitários nas direções x e y , respectivamente; D_x e D_y representam as componentes do vetor densidade de fluxo elétrico. Assim, a partir da relação constitutiva $\mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}}_r \mathbf{E}$, e utilizando a equação (2.3), as componentes D_x e D_y podem ser expressas na forma

$$D_x = \epsilon_0 (\epsilon_{\perp} E_x + j\delta E_y), \quad (2.6a)$$

$$D_y = \epsilon_0 (\epsilon_{\perp} E_y - j\delta E_x). \quad (2.6b)$$

Substituindo (2.6) em (2.5), resulta em

$$\mathbf{D}^+ = \epsilon_0 \epsilon^+ \mathbf{E}^+, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{D}^- = \epsilon_0 \epsilon^- \mathbf{E}^-, \quad (2.7b)$$

na qual

$$\epsilon^+ = \epsilon_{\perp} + \delta, \quad (2.8a)$$

$$\epsilon^- = \epsilon_{\perp} - \delta. \quad (2.8b)$$

As constantes de propagação das ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda, denotadas por β^+ e β^- , respectivamente, podem ser escritas como

$$\beta^+ = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^+}, \quad (2.9a)$$

$$\beta^- = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^-}, \quad (2.9b)$$

onde ω é a frequência angular e c_0 a velocidade da luz no vácuo, $c_0 = 3 \times 10^8$ m/s. Conseqüentemente, materiais anisotrópicos, magnetizados ao longo da direção de propagação da luz, suportam ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda com diferentes constantes de propagação. Tal fenômeno está relacionado apenas ao efeito magnetoóptico, resultando em propriedades ópticas não-recíprocas do material. Em materiais que apresentam o tensor dielétrico simétrico, tal como LiNbO_3 , o tratamento analítico aqui apresentado não se aplica pois ondas circularmente polarizadas, com diferentes constantes de propagação, não existem em tais materiais [12].

2.2.2 Efeito Faraday

Uma luz linearmente polarizada, representada pelas componentes de campo elétrico

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi_x) \quad (2.10a)$$

e

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi_y), \quad (2.10b)$$

incide em um amostra de uma material magnetoóptico, magnetizado ao longo da direção de propagação, como ilustra a Figura 2-3. Nas equações (2.10), E_0 é a amplitude do campo elétrico, ψ_x e ψ_y , são os ângulos de fase dos campos E_x e E_y , respectivamente. A luz incidente, no plano $z = 0$, é decomposta em duas ondas circularmente polarizadas – à direita e à esquerda, e neste caso, os campos E_x e E_y pode ser escritos como

$$E_x = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t), \quad (2.11a)$$

$$E_y = \frac{E_0}{2} \sin(\omega t). \quad (2.11b)$$

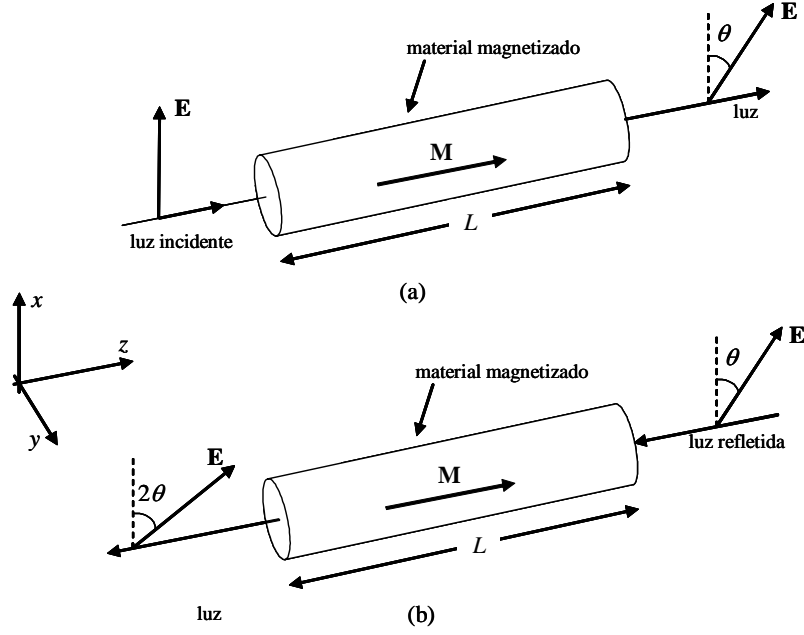


Figura 2-3: Rotação do plano de polarização da luz transmitida em um meio magnetoóptico magnetizado: (a) luz transmitida; (b) luz refletida.

Assim, a partir da equação (2.4), os campos elétricos das ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda, que se propagam na direção z , podem ser obtidos e escrito na forma

$$\mathbf{E}^+ = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t) \hat{x} + j \frac{E_0}{2} \sin(\omega t) \hat{y}, \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{E}^- = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t) \hat{x} - j \frac{E_0}{2} \sin(\omega t) \hat{y}. \quad (2.12b)$$

Na saída $z = L$ os campos resultantes, \mathbf{E}^+ e \mathbf{E}^- , podem ser escritos como,

$$\mathbf{E}^+ = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \beta^+ L) \hat{x} + j \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - \beta^+ L) \hat{y}, \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{E}^- = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \beta^- L) \hat{x} + j \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - \beta^- L) \hat{y}, \quad (2.13b)$$

onde β^+ e β^- foram definidos nas equações (2.9). Assim, o campo total no plano $z = L$ pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- &= E_0 \cos \left[\omega t - \frac{1}{2} (\beta^+ + \beta^-) L \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\beta^- - \beta^+) L \right] \hat{x} + \\ &+ j E_0 \cos \left[\omega t - \frac{1}{2} (\beta^+ + \beta^-) L \right] \sin \left[\frac{1}{2} (\beta^- - \beta^+) L \right] \hat{y}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Separando as componentes E_x e E_y na saída do dispositivo,

$$E_x = E_0 \cos \left[\omega t - \frac{1}{2} (\beta^+ + \beta^-) L \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\beta^- - \beta^+) L \right], \quad (2.15a)$$

$$E_y = E_0 \cos \left[\omega t - \frac{1}{2} (\beta^+ + \beta^-) L \right] \sin \left[\frac{1}{2} (\beta^- - \beta^+) L \right]. \quad (2.15b)$$

A equação (2.15) indica que a luz na saída do dispositivo é linearmente polarizada ao longo da direção definida pelo ângulo θ , formado entre o campo elétrico total e o eixo x , e definido por

$$\theta = \frac{1}{2} (\beta^- - \beta^+) L. \quad (2.16)$$

Assim, o plano de polarização da luz sofre uma rotação de θ radianos quando esta se propaga no material magnetoóptico de comprimento L , como ilustra a Figura 2-3a. Tal fenômeno é denominado *efeito Faraday*. Usando as equações (2.9) e (2.8), assumindo que $\epsilon_{\perp} \gg \delta$, o ângulo de rotação de Faraday, θ , pode ser escrito como

$$\theta = \frac{\omega}{2c_0} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_{\perp}}} \delta L. \quad (2.17)$$

Supondo que a luz é refletida na saída do dispositivo, como mostra a Figura 2-3b, e se propaga no sentido oposto ao vetor magnetização \mathbf{M} , então tem-se que $\delta < 0$ e $\theta < 0$. O plano de polarização da luz refletida é, assim, rotacionado de um ângulo θ radianos no sentido horário, produzindo uma diferença de 2θ radianos com relação à luz que incide no dispositivo ($z = 0$) – fenômeno este conhecido como *efeito Kerr*. Se os parâmetros do dispositivo são ajustados de modo que a condição $\theta = \pi/4$ radianos seja satisfeita, pode-se implementar um isolador óptico colocando-se uma seção do guia magnetoóptico entre dois polarizadores, conforme ilustração apresentada na Figura 2-4. Com base nesses princípios, foram desenvolvidos circuladores e isoladores ópticos com baixas perdas, para aplicação em sistemas de comunicações ópticas [6].

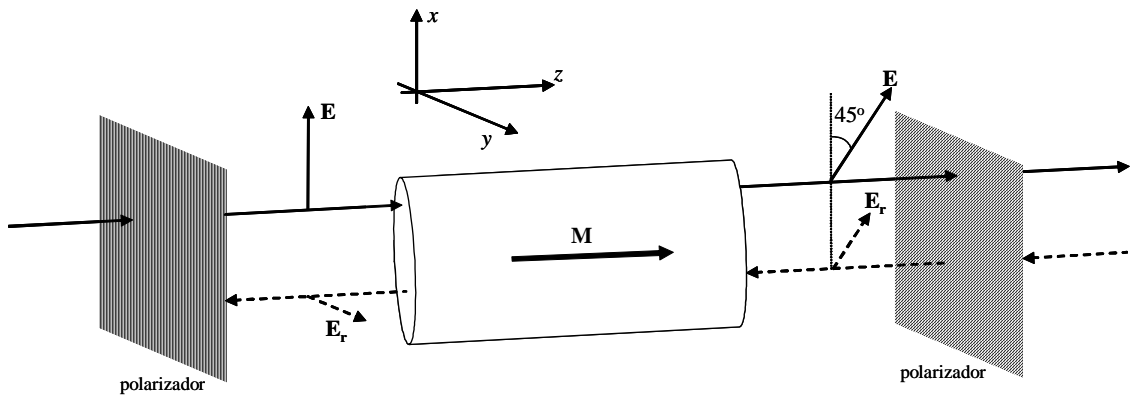


Figura 2-4: Configuração básica de um isolador óptico.

Quando a luz se propaga perpendicularmente ao vetor magnetização \mathbf{M} , uma birrefringência mag-

nética proporcional a M^2 é induzida. Este fenômeno é conhecido como efeito Cotton-Mouton [12]. Em materiais magnético de interesse, como as granadas (*garnets*), a birrefringência magnética é, geralmente, desprezível.

2.3 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos – FEM, é um procedimento numérico aplicado à resolução de equações diferenciais parciais em domínios finitos. Através da discretização de domínios contínuos obtém-se sistemas de equações lineares, geralmente esparsos, que podem ser resolvidos utilizando técnicas eficientes. A natureza esparsa do sistema de equações é uma de suas vantagens, uma vez que tal característica facilita sua resolução. Uma outra vantagem do método é sua versatilidade para análise de estruturas com geometrias complexas, isto é, o FEM pode ser utilizado em domínios com características não-homogêneas e de formatos irregulares. Assim, em regiões onde exista grande variação e/ou alta intensidade do campo eletromagnético, usam-se malhas mais refinadas do que em outras regiões, onde a variação e/ou a intensidade do campo é menor; esta situação é em geral difícil ou, às vezes, impossível de ser tratada eficientemente com outros métodos.

Devido à sua precisão, flexibilidade e otimização dos recursos computacionais, requisitos fundamentais para o cálculo das características de propagação em estruturas ópticas de domínios arbitrários, com reduzido esforço computacional e baixo tempo de processamento, o método dos elementos finitos se apresenta como uma valiosa ferramenta numérica para estudo da fotônica.

2.3.1 Problemas de contorno

Introdução

Os problemas de contorno aparecem no modelamento matemático de sistemas físicos e suas soluções configuram-se o aspecto mais importante da física-matemática. A seguir, são apresentados dois métodos clássicos empregados na solução de problemas de contorno – o método variacional de Ritz e o método de Galerkin, que formam a base do moderno método dos elementos finitos [21].

Um problema típico pode ser definido pela equação diferencial,

$$\mathcal{L}(\phi) = f, \quad (2.18)$$

que, juntamente com as condições de contorno na fronteira Γ , encerram a solução ϕ no domínio Ω . Em problemas eletromagnéticos, a forma da equação diferencial (2.18) varia desde a equação de Poisson até complicadas equações vetoriais, cuja solução analítica torna-se inviável. Para suplantar tais dificuldades vários métodos foram desenvolvidos, sendo os métodos de Ritz e de Galerkin os mais utilizados.

Método de Ritz

Neste método, também conhecido como Rayleigh-Ritz, o problema de condições de contorno, descrito pela equação (2.18), é formulado em termos de uma expressão variacional, cujo mínimo corresponde à equação (2.18) sob as condições de contorno em Γ .

Seja o produto interno entre duas funções, ϕ e ψ , definido como

$$\langle \phi, \psi \rangle \triangleq \int_{\Omega} \phi \psi^* d\Omega, \quad (2.19)$$

onde ψ^* é o complexo conjugado da função ψ . Seja \mathcal{L} um operador linear e auto-adjunto, isto é,

$$\langle \mathcal{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{L}\psi \rangle, \quad (2.20)$$

e definido como positivo,

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle \begin{cases} > 0, & \phi \neq 0 \\ = 0, & \phi = 0 \end{cases}. \quad (2.21)$$

A solução para (2.18) pode ser obtida pela minimização do funcional¹

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\phi}, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \tilde{\phi} \rangle \quad (2.22)$$

com relação à função teste $\tilde{\phi}$. Uma vez determinado o funcional $F(\tilde{\phi})$, assume-se que a função teste pode ser representada pela combinação linear

$$\tilde{\phi} = \sum_{J=1}^N c_J v_J = [c]^T [v] = [v]^T [c], \quad (2.23)$$

onde N é o número de nós globais, isto é, o número de pontos em que o domínio foi dividido; v_J é um conjunto de funções que forma uma base no domínio Ω e c_J são coeficientes a serem determinados. Aqui, $[\cdot]$ indica um vetor coluna e $[\cdot]^T$ denota a transposta desse vetor. Substituindo (2.23) em (2.22), obtém-se

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} [c]^T \int_{\Omega} [v] \mathcal{L} [v]^T d\Omega [c] - [c]^T \int_{\Omega} [v] f d\Omega. \quad (2.24)$$

Minimizando o funcional $F(\tilde{\phi})$ em relação a c_I , toma-se

$$\frac{\partial F(\tilde{\phi})}{\partial c_I} = 0. \quad (2.25)$$

Assim,

$$\frac{\partial F(\tilde{\phi})}{\partial c_I} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_I \mathcal{L} [v]^T d\Omega [c] + \frac{1}{2} [c]^T \int_{\Omega} [v] \mathcal{L} v_I d\Omega - \int_{\Omega} v_I f d\Omega = 0,$$

¹Outros funcionais poderiam ser usados

ou

$$\frac{1}{2} \sum_{J=1}^N c_J \int_{\Omega} (v_I \mathcal{L} v_J + v_J \mathcal{L} v_I) d\Omega - \int_{\Omega} v_I f d\Omega = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

A equação (2.26) pode ser escrita sob forma matricial

$$\mathbb{S}[c] = [b], \quad (2.27)$$

onde $[c]$ é um vetor $N \times 1$ cujos elementos são as incógnitas a serem determinadas; os elementos da matriz simétrica \mathbb{S} são definidos por

$$S_{I,J} = \int_{\Omega} v_I \mathcal{L} v_J d\Omega, \quad I, J = 1, 2, \dots, N \quad (2.28a)$$

e

$$b_I = \int_{\Omega} v_I f d\Omega, \quad I = 1, 2, \dots, N. \quad (2.28b)$$

Assim, a solução aproximada para (2.18) pode ser obtida pela resolução do sistema de equações lineares (2.27), de dimensões $N \times N$.

Método de Galerkin

Neste método define-se uma função resíduo, tal que

$$r(\tilde{\phi}) = \mathcal{L}(\tilde{\phi}) - f \neq 0, \quad (2.29)$$

onde $\tilde{\phi}$ é uma aproximação da solução ϕ . A melhor aproximação para a solução ϕ será aquela que minimiza a função resíduo em todos os pontos do domínio Ω . Desta forma, o método de Galerkin força a condição

$$R = \left\langle r(\tilde{\phi}), w \right\rangle = 0, \quad (2.30)$$

onde w é a função-peso, adequadamente escolhida, tal que $w \in \Omega$. A partir de (2.19), tem-se

$$R_I = \int_{\Omega} w_I r d\Omega = 0. \quad (2.31)$$

Assumindo que a solução aproximada $\tilde{\phi}$ pode ser obtida da combinação linear (2.23), e usando (2.29), a equação (2.31) pode ser escrita na forma

$$R_I = \int_{\Omega} w_I \left[\mathcal{L} \left(\sum_{J=1}^N c_J v_J \right) - f \right] d\Omega = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N. \quad (2.32)$$

Assumindo que

$$w_I = v_I, \quad I = 1, 2, \dots, N,$$

então, a equação (2.32) pode ser reescrita como,

$$c_J \int_{\Omega} v_I \mathcal{L}(v_J) d\Omega - \int_{\Omega} v_I f d\Omega = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N,$$

ou, sob forma matricial

$$\mathbb{K}[c] = [q], \quad (2.33)$$

onde $[c]$ é um vetor $N \times 1$ cujos elementos são as incógnitas a serem determinadas; os elementos da matriz \mathbb{K} são definidos por

$$K_{I,J} = \int_{\Omega} v_I \mathcal{L}(v_J) d\Omega, \quad I, J = 1, 2, \dots, N,$$

e

$$q_I = \int_{\Omega} v_I f d\Omega, \quad I = 1, 2, \dots, N.$$

2.3.2 O método dos elementos finitos

Nos procedimentos descritos acima, a função-aproximação $\tilde{\phi}$ deve ser definida sobre todo o domínio Ω e representa uma aproximação para a solução exata ϕ ; esta é a condição fundamental para a aplicação dos métodos de Ritz ou Galerkin. Contudo, em inúmeros problemas, tal condição é muito difícil, se não impossível, de ser alcançada. Para minimizar este problema, pode-se dividir o domínio Ω em pequenos subdomínios e utilizar funções-aproximação definidas apenas sobre cada um dos subdomínio. Deste modo, as funções $\tilde{\phi}$ são, via de regra, muito mais simples pois, tendo os subdomínios dimensões muito pequenas, a variação da função ϕ é muito menos drástica sobre cada um desses elementos [21, 22].

Para ilustrar tal procedimento, considere o domínio unidimensional Ω , definido pelo intervalo $z_0 < z < z_f$, e dividido em M subdomínios ou “elementos finitos”, sendo que o comprimento do e -ésimo elemento é l^e . Os pontos z_I ($I = 1, 2, 3, \dots, N$) indicam a posição do I -ésimo nó global, com $z_1 = z_0$ e $z_N = z_f$. Tanto os elementos quanto os nós são numerados da esquerda para direita, como ilustra a Figura 2-5, sendo que os nós globais e locais (definidos no e -ésimo elemento) estão relacionados por

$$z_1^e = x_e \quad \text{e} \quad z_2^e = z_{e+1}, \quad (2.35)$$

para $e = 1, 2, \dots, M$.

A partir da definição dos elementos, deve-se selecionar a função de interpolação, definida apenas sobre o elemento finito; essas funções podem ser lineares, quadráticas, etc. Considerando-se funções lineares, $\phi(z)$ pode ser definida no e -ésimo elemento como

$$\phi^e(z) = a^e + b^e z, \quad (2.36)$$

onde a^e e b^e são coeficientes a serem determinados. Para elementos lineares há dois nós associados a

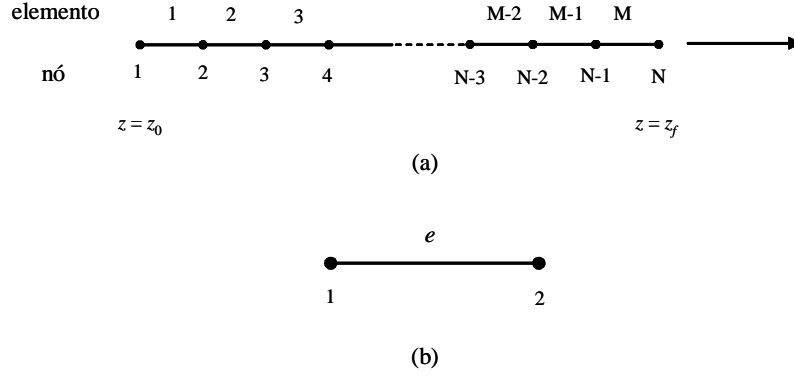


Figura 2-5: Domínio unidimensional subdividido em M elementos lineares. (a) elementos e nós globais. (b) e -ésimo elemento linear com a respectiva numeração local.

cada elemento (nós locais): um nó localizado em z_e^1 e o outro em z_e^2 . Especificando (2.36) nesses dois nós, tem-se

$$\begin{cases} \phi_1^e = a^e + b^e z_1^e \\ \phi_2^e = a^e + b^e z_2^e \end{cases} \quad (2.37)$$

onde ϕ_1^e e ϕ_2^e representam os valores de $\phi(z)$ nos pontos z_1^e e z_2^e , respectivamente. Resolvendo (2.37) para a^e e b^e e substituindo em (2.36), obtém-se

$$\phi^e(z) = \sum_{j=1}^2 N_j^e \phi_j^e = [N^e]^T [\phi^e] = [\phi^e]^T [N^e], \quad (2.38)$$

onde N_1^e e N_2^e são as funções de interpolação ou *funções de forma*, definidas por

$$N_1^e(z) = \frac{z_2^e - z}{l^e} \quad \text{e} \quad N_2^e(z) = \frac{z - z_1^e}{l^e} \quad (2.39)$$

onde $l^e = z_2^e - z_1^e$. Convém observar que $N_j^e(z_i^e) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, como mostra a Figura 2-6.

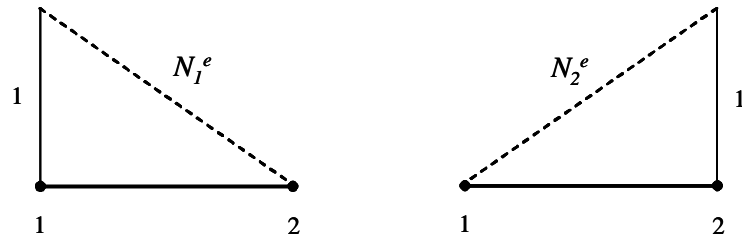


Figura 2-6: Funções de base lineares em um domínio unidimensional.

A partir da discretização do domínio Ω , o problema definido pela equação diferencial (2.18) pode ser resolvido inicialmente no e -ésimo elemento, onde a solução é conhecida – definida por (2.38), e

as funções de forma são facilmente determinadas. Uma vez conhecida a solução no e -ésimo elemento finito, a solução sobre todo o domínio Ω pode ser determinada. Portanto, para o método de Galerkin, a função-resíduo pode ser escrita, no e -ésimo elemento, como

$$r(\phi^e) = \mathcal{L}(\phi^e) - f \neq 0.$$

Assim, neste elemento, tem-se o produto interno

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \mathcal{L} \{ \phi^e - f \} d\Omega \quad i = 1, 2,$$

ou

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \mathcal{L} \{ [N^e]^T \} d\Omega [\phi^e] - f N_i^e d\Omega \quad i = 1, 2, \quad (2.40)$$

onde $w^e = N_i^e$. A equação (2.40) pode ser escrita na forma matricial

$$[R_i^e] = \mathbb{K}^e [\phi^e] - [q^e] \quad (2.41)$$

onde

$$R_i^e = [R_1^e, R_2^e, \dots, R_n^e]^T \quad i = 1, 2, \quad (2.42a)$$

$$K_{i,j}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \mathcal{L} \{ [N^e]^T \} d\Omega \quad i, j = 1, 2, \quad (2.42b)$$

$$q_i^e = \int_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \quad i = 1, 2, \quad (2.42c)$$

e cuja solução determina a função $\phi^e(z)$.

A partir do sistema de equações (2.41) pode-se determinar a solução da equação (2.18) usando a relação entre os nós locais e globais, definidos em (2.35). Desta forma, o produto interno R_I , definido em (2.31), pode ser escrito em função do produto interno elementar, na forma

$$R_I = \sum_{e=1}^M [R^e] = \sum_{e=1}^M (\mathbb{K}^e [\phi^e] - [q^e]) = 0 \quad I = 1, 2, \dots, N, \quad (2.43)$$

e portanto,

$$\mathbb{K} [\phi] = [q], \quad (2.44)$$

onde $[\phi]$ é um vetor $N \times 1$ cujos elementos são as incógnitas a serem determinadas; os elementos da matriz \mathbb{K} são definidos por

$$K_{I,J} = \sum_{e=1}^M \mathbb{K}^e \quad I, J = 1, 2, \dots, N, \quad (2.45a)$$

e

$$q_I = \sum_{e=1}^M [q^e] \quad I, = 1, 2, \dots, N. \quad (2.45b)$$

A solução do sistema de equações (2.44) encerra a solução da equação diferencial (2.18), uma vez que $\phi_J = \phi(z_J) \phi(z)$, sendo que $z_J \in \Omega$.

Capítulo 3

Modelamento Matemático do Guia Anisotrópico

3.1 Introdução

O modelamento de estruturas ópticas anisotrópicas tem se apresentado como assunto recorrente na literatura especializada [13, 14, 15, 16, 18, 28]. Tais estudos, no entanto, vêm sendo desenvolvidos usando técnicas semi-analíticas e, por este motivo, limitados a meios de características simples. A utilização de métodos numéricos possibilita estender os estudos já realizados, uma vez que permite o estudo em meios com características diversas e geometrias mais complexas.

Este capítulo apresenta uma dedução detalhada, não disponível na literatura, das equações que governam, da forma mais geral possível, a propagação de uma onda eletromagnética em domínios bidimensionais completamente anisotrópicos. As equações, obtidas de forma unificada e compacta, constituem o embasamento teórico para o modelo numérico a ser implementado e, conseqüentemente, para o estudo das estruturas fotônicas planares que são o foco desta tese.

Com o objetivo de estudar o efeito que as características anisotrópicas do meio exercem sobre a polarização da onda que nele se propaga, a equação de onda é decomposta em suas componentes transversal e longitudinal à direção de propagação. Deste processo resulta um sistema acoplado de equações diferenciais de segunda ordem, cujos campos magnéticos transversais à direção de propagação são incógnitas a serem determinadas. Então, os métodos de Galerkin e dos elementos finitos são aplicados ao sistema de equações, para viabilizar uma solução numérica para os campos magnéticos transversais.

3.2 Equações da onda em coordenadas cartesianas generalizadas

Seja a estrutura óptica planar ilustrada na Figura 3-1, orientada sob o sistema de coordenadas (i, j, k) . Aqui, tal sistema representa, de forma generalizada, o sistema (x, y, z) de modo que, aplicando

rotações cíclicas horárias, pode-se obter as seguintes relações:

$$(i, j, k) = (x, y, z) \quad (3.1a)$$

$$(i, j, k) = (z, x, y) \quad (3.1b)$$

$$(i, j, k) = (y, z, x) \quad (3.1c)$$

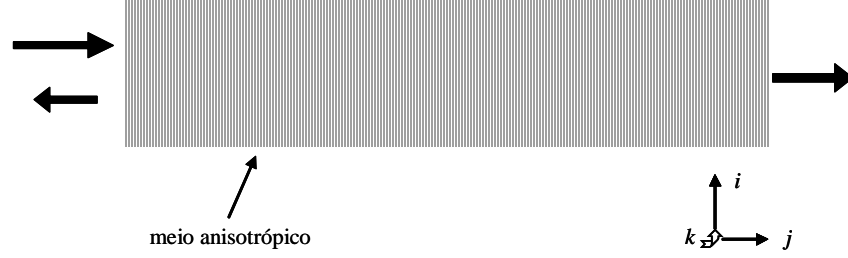


Figura 3-1: Ilustração de uma estrutura planar óptica.

Para que seja possível estudar o efeito que a anisotropia exerce sobre a polarização da luz, a equação de onda deve ser decomposta nas suas componentes transversal e axial. Portanto, considere-se as equações de Maxwell na sua forma pontual, em uma região livre de fontes,

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\bar{\mu}} \mathbf{h}), \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{e}), \quad (3.2b)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{e}) = 0, \quad (3.2c)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\mu}} \mathbf{h}) = 0, \quad (3.2d)$$

onde $\mathbf{e} = \mathbf{e}(i, j, k, t)$ é o vetor campo elétrico, $\mathbf{h} = \mathbf{h}(i, j, k, t)$ o vetor campo magnético, $\bar{\bar{\epsilon}}$ o tensor permissividade elétrica e $\bar{\bar{\mu}}$ o tensor permeabilidade magnética. Combinando as equações de Faraday (3.2a) e Ampère (3.2b), e assumindo que o meio é invariante no tempo, obtém-se a equação vetorial da onda, escrita em função dos campos elétrico,

$$\nabla \times \left[\bar{\bar{\epsilon}}_r \nabla \times \mathbf{e} \right] = -\frac{\bar{\bar{\epsilon}}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e}, \quad (3.3a)$$

ou do campo magnético,

$$\nabla \times \left[\bar{\bar{\mu}}_r \nabla \times \mathbf{h} \right] = -\frac{\bar{\bar{\mu}}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{h}, \quad (3.3b)$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade da luz no vácuo e

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_r &= \frac{1}{\bar{\mu}_r}, \\ \bar{\phi}_r &= \frac{1}{\bar{\epsilon}_r}.\end{aligned}$$

A generalização da equação da onda possibilita maior flexibilização na utilização dos algoritmos, tanto para o campo elétrico \mathbf{e} quanto para campo magnético \mathbf{h} . Assim, assume-se que a equação da onda pode ser escrita em função do campo vetorial \mathbf{f} ,

$$\nabla \times \left[\bar{\zeta}_r \nabla \times \mathbf{f} \right] + \frac{\bar{\xi}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f} = 0, \quad (3.4)$$

tal que as equações (3.3a) e (3.3b) podem ser obtidas, considerando-se:

$$\text{I. Caso Elétrico} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} = \mathbf{e} \\ \bar{\xi}_r = \bar{\epsilon}_r \\ \bar{\zeta}_r = \bar{\theta}_r = \frac{1}{\bar{\mu}_r} \end{array} \right. \quad (3.5a)$$

$$\text{II. Caso Magnético} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} = \mathbf{h} \\ \bar{\xi}_r = \bar{\mu}_r \\ \bar{\zeta}_r = \bar{\phi}_r = \frac{1}{\bar{\epsilon}_r} \end{array} \right. \quad (3.5b)$$

De maneira geral, o meio de propagação pode ser definido pelo tensor $\bar{\xi}$, na forma

$$\bar{\xi} = \xi_0 \bar{\xi}_r,$$

onde $\bar{\xi}$ representa a permissividade $\bar{\epsilon}$ ou a permeabilidade $\bar{\mu}$. Considerado que não há variação segundo a coordenada k (caso planar), embora o meio seja anisotrópico e espacialmente arbitrário, será permitido apenas variação nas direções i e j . Assim, o tensor $\bar{\xi}_r$ pode ser definido como

$$\bar{\xi}_r = \begin{bmatrix} \xi_{ii}(i,j) & \xi_{ij}(i,j) & \xi_{ik}(i,j) \\ \xi_{ji}(i,j) & \xi_{jj}(i,j) & \xi_{jk}(i,j) \\ \xi_{ki}(i,j) & \xi_{kj}(i,j) & \xi_{kk}(i,j) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Utilizando notação diádica [23], o tensor $\bar{\xi}_r$ pode ser decomposto em termos de suas componentes

transversal (i, j) e axial (k) , conforme segue:

$$\overset{=}{\xi}_r = \overset{=}{\xi}_T + \overset{\wedge}{\xi}_{ji} \hat{k} + \hat{k} \overset{\wedge}{\xi}_{ij} + \overset{\wedge\wedge}{\xi}_{kk} \overset{\wedge\wedge}{k} k, \quad (3.7a)$$

$$\overset{=}{\xi}_T = \begin{bmatrix} \xi_{ii}(i, j) & \xi_{ij}(i, j) \\ \xi_{ji}(i, j) & \xi_{jj}(i, j) \end{bmatrix}, \quad (3.7b)$$

$$\overset{\wedge}{\xi}_{ji} = \xi_{ki}(i, j) \hat{i} + \xi_{kj}(i, j) \hat{j}, \quad (3.7c)$$

$$\overset{\wedge}{\xi}_{ij} = \xi_{ik}(i, j) \hat{i} + \xi_{jk}(i, j) \hat{j}. \quad (3.7d)$$

Uma vez determinada a equação de onda (3.4), é necessário decompô-la em suas componentes transversal e axial. O desenvolvimento descrito a seguir apresenta, de forma detalhada, tal decomposição.

Assumindo uma geometria planar, e considerando que não há variação ao longo da direção k , isto é, $\frac{\partial}{\partial k} = 0$, pode-se reescrever a equação (3.4) na forma

$$\nabla_T \times \left[\overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) \right] + \frac{\overset{=}{\xi}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) = 0, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{f}_T = f_i \hat{i} + f_j \hat{j}$ é a componente transversal do campo vetorial \mathbf{f} , $\mathbf{f}_k = f_k \hat{k}$ sua componente axial e

$$\nabla_T = \frac{\partial}{\partial i} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial j} \hat{j}.$$

Para trabalhar o primeiro termo da equação (3.8), faz-se uso da equação (3.7a)

$$\overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) = \left[\overset{=}{\zeta}_T + \overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \hat{k} + \hat{k} \overset{\wedge}{\zeta}_{ij} + \overset{\wedge\wedge}{\zeta}_{kk} \overset{\wedge\wedge}{k} k \right] \cdot [\nabla_T \times \mathbf{f}_T + \nabla_T \times \mathbf{f}_k],$$

e das equações (3.7c)-(3.7d), obtém-se

$$\begin{aligned} \overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) &= \overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \hat{k} \overset{\wedge}{\zeta}_{ij} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \overset{\wedge\wedge}{\zeta}_{kk} \overset{\wedge\wedge}{k} k \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \\ &+ \overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \hat{k} \overset{\wedge}{\zeta}_{ij} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge\wedge}{\zeta}_{kk} \overset{\wedge\wedge}{k} k \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sabendo que,

$$\nabla_T \times \mathbf{f}_T = \hat{k} \left[\frac{\partial f_j}{\partial i} - \frac{\partial f_i}{\partial j} \right], \quad (3.10a)$$

$$\nabla_T \times \mathbf{f}_k = \hat{i} \frac{\partial f_k}{\partial j} - \hat{j} \frac{\partial f_k}{\partial i}, \quad (3.10b)$$

então,

$$\overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_T = \hat{k} \overset{\wedge}{\zeta}_{ij} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T = \overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k = \overset{\wedge}{\zeta}_{kk} \hat{k} \hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k = 0. \quad (3.10c)$$

Utilizando as relações (3.10a)-(3.10c), a equação (3.9) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) &= \overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \left(\hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right) + \\ &+ \hat{k} (\overset{\wedge}{\zeta}_{ij} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k) + \overset{\wedge}{\zeta}_{kk} \hat{k} \left(\hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

A equação (3.11) pode ser simplificada utilizando as relações vetoriais

$$\overset{\wedge}{\zeta}_{ji} \left(\hat{k} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right) = \overset{\wedge}{\zeta}'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T, \quad (3.12a)$$

e

$$\hat{k} (\overset{\wedge}{\zeta}_{ij} \cdot \nabla_T \times \mathbf{f}_k) = \overset{\wedge}{\zeta}'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k, \quad (3.12b)$$

onde os vetores $\overset{\wedge}{\zeta}'_{ij}$ e $\overset{\wedge}{\zeta}'_{ji}$ são definidos por

$$\overset{\wedge}{\zeta}'_{ij} = \overset{\wedge}{\zeta}_{kj} \hat{i} - \overset{\wedge}{\zeta}_{ki} \hat{j}, \quad (3.13a)$$

$$\overset{\wedge}{\zeta}'_{ji} = -\overset{\wedge}{\zeta}_{jk} \hat{i} + \overset{\wedge}{\zeta}_{ik} \hat{j}. \quad (3.13b)$$

Desta maneira, a equação (3.11) pode ser reescrita, de forma compacta, como

$$\overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) = \overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \overset{\wedge}{\zeta}'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T. \quad (3.14)$$

Aplicando rotacional na equação (3.14),

$$\nabla_T \times \left[\overset{=}{\zeta}_r \nabla_T \times (\mathbf{f}_T + \mathbf{f}_k) \right] = \nabla_T \times \left[\overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \overset{\wedge}{\zeta}'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \overset{\wedge}{\zeta}_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right].$$

e observando que, aplicando operações vetoriais, os termos

$$\begin{aligned} &\nabla_T \times [\overset{\wedge}{\zeta}_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T], \\ &\nabla_T \times [\overset{\wedge}{\zeta}'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k] \end{aligned} \quad (3.15a)$$

possuem somente componentes nas direções i e j , enquanto que

$$\begin{aligned} &\nabla_T \times \left[\overset{=}{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k \right], \\ &\nabla_T \times [\overset{\wedge}{\zeta}'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T] \end{aligned} \quad (3.15b)$$

possuem apenas componentes na direção k . Desta forma, a equação (3.14) pode ser decomposta nas

componentes

$$\left[\nabla_T \times \bar{\zeta}_r \nabla \times \mathbf{f} \right]_T = \nabla_T \times \left[\zeta'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \zeta_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right], \quad (3.16a)$$

$$\left[\nabla_T \times \bar{\zeta}_r \nabla \times \mathbf{f} \right]_k = \nabla_T \times \left[\bar{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \zeta'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T \right], \quad (3.16b)$$

onde o índices T e k , indicam as componentes transversal e axial, respectivamente.

Da mesma forma, o segundo termo da equação (3.8), associado à derivada temporal, pode ser decomposto em componentes transversal e axial. Assim, se

$$\bar{\xi}_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f} = \bar{\xi}_r \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k \right], \quad (3.17)$$

fazendo uso da equação (3.7a), pode-se escrever a equação (3.17) na forma

$$\bar{\xi}_r \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k \right] = \left[\bar{\xi}_T + \xi_{ji}^{\wedge} k + k^{\wedge} \xi_{ij} + \xi_{kk}^{\wedge\wedge} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k \right]. \quad (3.18)$$

Expandindo, termo a termo, a equação (3.18),

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_r \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k \right] &= \bar{\xi}_T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + k^{\wedge} \xi_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \xi_{ji}^{\wedge} k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \xi_{kk}^{\wedge\wedge} k k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \\ &+ \bar{\xi}_T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k + k^{\wedge} \xi_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k + \xi_{ji}^{\wedge} k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k + \xi_{kk}^{\wedge\wedge} k k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k, \end{aligned}$$

e considerando que o produto escalar entre suas componentes ortogonais é nulo, isto é,

$$\xi_{ji}^{\wedge} k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T = \xi_{kk}^{\wedge\wedge} k k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T = \bar{\xi}_T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k = k^{\wedge} \xi_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k = 0,$$

pode-se decompor a equação (3.18) em suas componentes transversal e axial.

$$\left[\bar{\xi}_T \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f} \right]_T = \bar{\xi}_T \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \xi_{ji}^{\wedge} k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k, \quad (3.19a)$$

$$\left[\bar{\xi}_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f} \right]_k = k^{\wedge} \xi_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_T + \xi_{kk}^{\wedge\wedge} k k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}_k. \quad (3.19b)$$

Assim, a partir das equações (3.16) e (3.19), a equação de onda (3.4) pode ser decomposta nas componentes transversal e axial, respectivamente, como mostram as equações a seguir.

$$\nabla_T \times \zeta'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \nabla_T \times \zeta_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \frac{1}{c^2} \left[\bar{\xi}_T \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{f}_T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}_k}{\partial t^2} \xi_{ji} \right] = 0, \quad (3.20a)$$

$$\nabla_T \times \bar{\zeta}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \nabla_T \times \zeta'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \frac{1}{c^2} \left[\xi_{kk} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_k}{\partial t^2} + \xi_{ij} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{f}_T}{\partial t^2} k^{\wedge} \right] = 0. \quad (3.20b)$$

3.3 Equações da onda para o guia unidimensional

A flexibilidade do sistema de equações (3.20) permite obter a solução da equação da onda em função do campo elétrico ou do campo magnético, possibilitando o estudo da propagação da onda em materiais com anisotropia elétrica e/ou magnética. Neste trabalho estudou-se guias unidimensionais, cuja ilustração é apresentada na Figura 3-2, compostos de materiais estratificados não-magnéticos e com anisotropia elétrica transversal. Além disso, o campo magnético é utilizado para descrever o problema físico em questão.

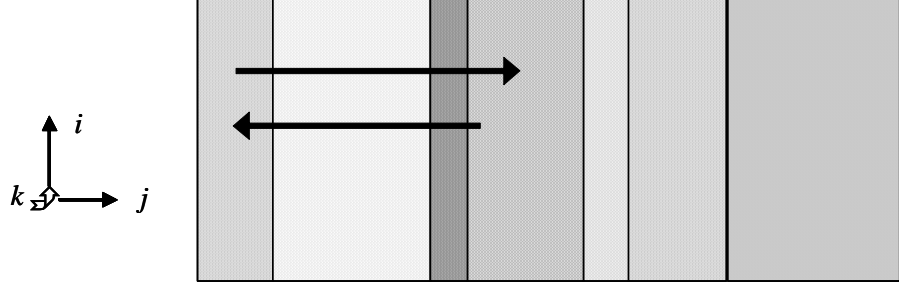


Figura 3-2: Ilustração de um guia unidimensional.

A partir das considerações acima, os tensores $\bar{\bar{\mu}}_r$ e $\bar{\bar{\epsilon}}_r$, que caracterizam o material, podem ser descritos como,

$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{ii} & 0 & \epsilon_{ik} \\ 0 & \epsilon_{jj} & 0 \\ \epsilon_{ki} & 0 & \epsilon_{kk} \end{bmatrix}, \quad (3.21b)$$

e,

$$\bar{\bar{\phi}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\epsilon}}_r} = \begin{bmatrix} \phi_{ii} & 0 & \phi_{ik} \\ 0 & \phi_{jj} & 0 \\ \phi_{ki} & 0 & \phi_{kk} \end{bmatrix}. \quad (3.21c)$$

Utilizando as relações definidas pela equação (3.5b), tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\xi}}_r &= \bar{\bar{\mu}}_r, \\ \bar{\bar{\zeta}}_r &= \bar{\bar{\phi}}_r, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\overset{=}{\zeta}_T = \overset{=}{\phi}_T = \phi_{ii}(i, j) \hat{i} \hat{i} + \phi_{jj}(i, j) \hat{j} \hat{j}, \quad (3.22a)$$

$$\zeta'_{ij} = \phi'_{ij} = -\phi_{ki} \hat{j}, \quad (3.22b)$$

$$\zeta'_{ji} = \phi'_{ji} = \phi_{ik} \hat{j}. \quad (3.22c)$$

Tomando j como a direção de propagação, a geometria unidimensional é caracterizada pela condição

$$\frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial i} = 0,$$

as equações (3.20a)-(3.20b) podem ser reescritas na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial j} \phi_{kk} \frac{\partial f_i}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ki} \frac{\partial f_k}{\partial j} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} \right) \hat{i} = 0, \quad (3.23a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial j} \phi_{ii} \frac{\partial f_k}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ik} \frac{\partial f_i}{\partial j} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} \right) \hat{k} = 0, \quad (3.23b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} \right) \hat{j} = 0. \quad (3.23c)$$

As equações (3.23) descrevem a propagação da onda em uma estrutura unidimensional com anisotropia elétrica transversal à direção de propagação. Contudo, a equação (A.5b), disponível no Apêndice A, mostra que $\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0$ em materiais com anisotropia transversal e, portanto, a componente f_j é invariante no tempo. Assim, a partir da equação (3.23), observa-se que esta componente de campo jamais se acopla às outras. Baseado nas considerações anteriores pode-se afirmar que o valor do campo f_j na entrada do guia, no instante inicial, mantém-se invariante durante toda a propagação. No método dos elementos finitos em duas dimensões, os elementos de aresta de mais baixa ordem apresentam divergência nula e, portanto, são indicados para resolver problemas onde o campo é solenoidal [21]. Entretanto, as equações (A.9) mostram que, a rigor, apenas o campo magnético é soleinoidal. Desta forma, mesmo analisando estruturas planares unidimensionais, tomou-se o campo magnético para descrever o comportamento das estruturas fotônicas anisotrópicas a serem estudadas, muito embora o campo elétrico pudesse ser utilizado. Assim, as equações (3.23a) e (3.23b), reduzem-se, respectivamente, a

$$\frac{\partial}{\partial j} \phi_{kk} \frac{\partial h_i}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ki} \frac{\partial h_k}{\partial j} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} = 0, \quad (3.24a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial j} \phi_{ik} \frac{\partial h_i}{\partial j} + \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ii} \frac{\partial h_k}{\partial j} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} = 0, \quad (3.24b)$$

onde

$$\mathbf{h} = h_i \hat{i} + h_j \hat{j} + h_k \hat{k} \quad (3.25a)$$

e

$$h_i = h_i(j, t), \quad (3.25b)$$

$$h_k = h_k(j, t). \quad (3.25c)$$

Assumindo que os campos possuem variação temporal harmônica, na forma $\exp(j\omega t)$, as equações (3.24) podem ser escritas no domínio da frequência, como

$$\frac{\partial}{\partial j} \phi_{kk} \frac{\partial H_i}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ki} \frac{\partial H_k}{\partial j} = -\kappa_0^2 H_i, \quad (3.26a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial j} \phi_{ik} \frac{\partial H_i}{\partial j} + \frac{\partial}{\partial j} \phi_{ii} \frac{\partial H_k}{\partial j} = -\kappa_0^2 H_k, \quad (3.26b)$$

onde

$$\kappa_0 = \frac{\omega}{c}$$

é o número de onda do vácuo e H_i, H_k os fasores campo magnético, tal que

$$H_i = H_i(j),$$

$$H_k = H_k(j).$$

Orientando o sistema de coordenadas segundo a relação (3.1c), as equações que governam a propagação da onda podem ser expressas no sistema de coordenadas cartesiano, tal que

$$(i, j, k) = (y, z, x).$$

Assim,

$$\phi_r = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(z) & \phi_{xy}(z) & 0 \\ \phi_{yx}(z) & \phi_{yy}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

e as equações (3.26) são transcritas na forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_{xx} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{xy} \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\kappa_0^2 H_y, \quad (3.28a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \phi_{yx} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{yy} \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\kappa_0^2 H_x, \quad (3.28b)$$

onde

$$H_x = H_x(z),$$

$$H_y = H_y(z).$$

3.4 Discretização da equação de onda pelo método de Galerkin

A solução do sistema de equações (3.28) pelo método dos elementos finitos exige que as equações sejam escritas sob forma de integral. O método de Galerkin define os resíduos, R_1 e R_2 , referentes às equações (3.28a) e (3.28b), respectivamente, sob a forma integral [21],

$$R_1 = \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial z} \phi_{xx} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{xy} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \kappa_0^2 H_y \right] w dz, \quad (3.29a)$$

$$R_2 = \int_0^L \left[-\frac{\partial}{\partial z} \phi_{yx} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{yy} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \kappa_0^2 H_x \right] w dz, \quad (3.29b)$$

onde $w = w(z)$ é a função-peso, definida sobre o domínio $[0, L]$. A formulação fraca de Galerkin é obtida integrando, por partes, as equações (3.29). Assim, obtém-se:

$$R_1 = \int_0^L \left[-\phi_{xx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa_0^2 H_y w \right] dz + \int_0^L \phi_{xy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} dz + \phi_{xx} w \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_0^L - \phi_{xy} w \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_0^L, \quad (3.30a)$$

e

$$R_2 = \int_0^L \left[-\phi_{yy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa_0^2 H_x w \right] dz + \int_0^L \phi_{yx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} dz + \phi_{yy} w \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_0^L - \phi_{yx} w \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_0^L. \quad (3.30b)$$

As incógnitas H_x e H_y , soluções do sistema (3.29), são definidas, de forma aproximada, como uma combinação linear,

$$H_x = \sum_{J=1}^N N_J(z) a_{xJ}, \quad (3.31a)$$

$$H_y = \sum_{J=1}^N N_J(z) a_{yJ}, \quad (3.31b)$$

e a função-peso é escolhida, tal que

$$w = N_I(z). \quad (3.32)$$

Aqui, N é número de pontos sobre o domínio $[0, L]$ $N_J(z)$ são funções de interpolação definidas em todo o domínio $[0, L]$, normalmente funções polinomiais; a_{xJ} e a_{yJ} são coeficientes constantes, determinados a partir do sistema de equações (3.30), sob a condição:

$$R_1 = R_2 = 0. \quad (3.33)$$

Desta forma, utilizando (3.31), (3.32) e assumindo a condição (3.33), as equações (3.30) podem ser

reescritas como:

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{J=1}^N a_{yJ} \int_0^L \left[-\phi_{xx} \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial N_J}{\partial z} + \kappa_0^2 N_I N_J \right] dz + \sum_{J=1}^N a_{xJ} \int_0^L \phi_{xy} \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial N_J}{\partial z} dz + \\
& + \phi_{xx} N_I \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_0^L - \phi_{xy} N_I \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_0^L,
\end{aligned} \tag{3.34a}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{J=1}^N a_{xJ} \int_0^L \left[-\phi_{yy} \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial N_J}{\partial z} + \kappa_0^2 N_I N_J \right] dz + \sum_{J=1}^N a_{yJ} \int_0^L \phi_{yx} \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial N_J}{\partial z} dz + \\
& + \phi_{yy} N_I \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_0^L - \phi_{yx} N_I \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_0^L.
\end{aligned} \tag{3.34b}$$

O sistema de equações (3.34) encerra um problema de condição de contorno, cuja solução, as constantes a_{xJ} e a_{yJ} , determinam a solução da equação de onda (3.28). Para a solução, aplica-se no sistema (3.34) o método dos elementos finitos, onde o domínio $[0, L]$ é dividido em M pequenos subdomínios – denominados elementos finitos, tal que o número de $M = N - 1$, onde N é o número de pontos sobre o domínio $[0, L]$. Este procedimento permite definir funções de interpolação mais simples sobre cada subdomínio, facilitando, assim, a solução do problema. O método dos elementos finitos permite representar a solução global H_x e H_y , definida sobre $[0, L]$, em função de suas componentes elementares, na forma

$$H_x = \sum_{e=1}^M H_x^e, \tag{3.35a}$$

$$H_y = \sum_{e=1}^M H_y^e. \tag{3.35b}$$

Aqui, H_x^e e H_y^e são os campos magnéticos definidos no e -ésimo elemento finito e obtidos a partir da combinação linear

$$H_x^e = \sum_{j=1}^2 N_j^e(z) a_{xj}^e, \tag{3.36a}$$

$$H_y^e = \sum_{j=1}^2 N_j^e(z) a_{yj}^e; \tag{3.36b}$$

N_j^e são funções conhecidas, denominadas *funções de forma*, definidas sobre o domínio do e -ésimo elemento finito – (z_1^e, z_2^e) ; a_{xj}^e , a_{yj}^e são incógnitas a serem determinadas [21]. Da mesma maneira, a

função-peso é definida no e -ésimo elemento, tal que

$$w^e = \sum_{i=1}^2 N_i^e(z). \quad (3.37)$$

A partir dessas considerações, os resíduos R_1 e R_2 podem ser particularizados para o e -ésimo elemento, e escritos em função dos coeficientes a_x^e e a_y^e .

$$\begin{aligned} R_{1,i}^e = & \sum_{j=1}^2 a_{y_i}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \left[-\phi_{xx}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \kappa_0^2 N_i^e N_j^e \right] dz + \sum_{j=1}^2 a_{x_j}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi_{xy}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz + \\ & + \phi_{xx}^e N_i^e \frac{\partial H_y^e}{\partial z} \Big|_{z_1^e}^{z_2^e} - \phi_{xy}^e N_i^e \frac{\partial H_x^e}{\partial z} \Big|_{z_1^e}^{z_2^e}, \end{aligned} \quad (3.38a)$$

$$\begin{aligned} R_{2,i}^e = & \sum_{j=1}^2 a_{x_j}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \left[-\phi_{yy}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \kappa_0^2 N_i^e N_j^e \right] dz + \sum_{j=1}^2 a_{y_i}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi_{yx}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz + \\ & + \phi_{yy}^e N_i^e \frac{\partial H_x^e}{\partial z} \Big|_{z_1^e}^{z_2^e} - \phi_{yx}^e N_i^e \frac{\partial H_y^e}{\partial z} \Big|_{z_1^e}^{z_2^e}, \end{aligned} \quad (3.38b)$$

para $i = 1, 2$.

O sistema de equações (3.38) pode ser escrito em linguagem compacta, sob a forma matricial,

$$\mathbb{K}_{xx}^e [a_y^e] + \mathbb{K}_{xy}^e [a_x^e] + [g_x^e] = 0, \quad (3.39a)$$

$$\mathbb{K}_{yx}^e [a_y^e] + \mathbb{K}_{yy}^e [a_x^e] + [g_y^e] = 0, \quad (3.39b)$$

onde \mathbb{K}_{xx}^e , \mathbb{K}_{xy}^e , \mathbb{K}_{yx}^e , \mathbb{K}_{yy}^e são matrizes de dimensão 2×2 , definidas por

$$\mathbb{K}_{xx}^e = \sum_{j=1}^2 a_{y_i}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \left[-\phi_{xx}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \kappa_0^2 N_i^e N_j^e \right] dz, \quad i = 1, 2, \quad (3.40a)$$

$$\mathbb{K}_{yy}^e = \sum_{j=1}^2 a_{x_j}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \left[-\phi_{yy}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \kappa_0^2 N_i^e N_j^e \right] dz, \quad i = 1, 2, \quad (3.40b)$$

$$\mathbb{K}_{xy}^e = \sum_{j=1}^2 a_{x_j}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi_{xy}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz, \quad i = 1, 2, \quad (3.40c)$$

$$\mathbb{K}_{yx}^e = \sum_{j=1}^2 a_{y_i}^e \int_{z_1^e}^{z_2^e} \phi_{yx}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz; \quad i = 1, 2; \quad (3.40d)$$

$[g_x^e]$ e $[g_y^e]$ são vetores de dimensão 2×1 , tal que

$$[g_x^e] = [g_{xx}^e] - [g_{xy}^e], \quad (3.41a)$$

$$[g_y^e] = [g_{yy}^e] - [g_{yx}^e], \quad (3.41b)$$

e

$$[g_{xx}^e] = \phi_{xx}^e N_i^e \frac{\partial H_y^e}{\partial z} \bigg|_{z_1^e}^{z_2^e}, \quad (3.42a)$$

$$[g_{xy}^e] = \phi_{xy}^e N_i^e \frac{\partial H_x^e}{\partial z} \bigg|_{z_1^e}^{z_2^e}, \quad (3.42b)$$

$$[g_{yy}^e] = \phi_{yy}^e N_i^e \frac{\partial H_x^e}{\partial z} \bigg|_{z_1^e}^{z_2^e}, \quad (3.42c)$$

$$[g_{yx}^e] = \phi_{yx}^e N_i^e \frac{\partial H_y^e}{\partial z} \bigg|_{z_1^e}^{z_2^e}; \quad (3.42d)$$

$[a_y^e]$, $[a_x^e]$ são vetores de dimensão 2×1 .

Assim, uma vez definido o sistema de equações em cada elemento e considerando que o domínio $[0, L]$ é composto por M elementos finitos, a solução global é definida a partir de (3.39), como

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^M (\mathbb{K}_{xx}^e [a_y^e] + \mathbb{K}_{xy}^e [a_x^e] + [g_x^e]) = [0] \\ \sum_{e=1}^M (\mathbb{K}_{yx}^e [a_y^e] + \mathbb{K}_{yy}^e [a_x^e] + [g_y^e]) = [0] \end{cases}, \quad (3.43)$$

ou simplesmente,

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{xx} [a_y] + \mathbb{K}_{xy} [a_x] + [g_x] = 0 \\ \mathbb{K}_{yx} [a_y] + \mathbb{K}_{yy} [a_x] + [g_y] = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

onde

$$\mathbb{K} = \sum_{e=1}^M \mathbb{K}^e, \quad (3.45a)$$

$$[a] = \sum_{e=1}^M [a^e], \quad (3.45b)$$

$$[g] = \sum_{e=1}^M [g^e]. \quad (3.45c)$$

O sistema de equações (3.44) é um sistema linear, sendo que \mathbb{K} é uma matriz quadrada de dimensão $N \times N$ e os vetores $[a]$ e $[g]$ são vetores coluna de dimensão $N \times 1$, onde $N = M + 1$.

As matrizes \mathbb{K}^e , definidas a partir da função de interpolação escolhida, estão apresentadas no Apêndice A. Os vetores $[g]$ estabelecem as condições de contorno do problema a ser resolvido, como

mostram as equações (3.42) e (3.45c). Assim, se

$$\phi^e N_i^e \frac{dH^e}{dz} \Big|_{z_1^e}^{z_2^e} = \phi^e N_i^e(z_2^e) \frac{dH^e}{dz} \Big|_{z_2^e} - \phi^e N_i^e(z_1^e) \frac{dH^e}{dz} \Big|_{z_1^e}, \quad e = 1, 2, \dots, M, \quad (3.46)$$

e sabendo que $\left(\phi^e \frac{dH^e}{dz}\right)$ é contínua em qualquer ponto z_i [21], então,

$$\mp \phi^e \frac{dH^e}{dz} \Big|_{z_i^e} = 0, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Como a função de forma é definida, sobre o e -ésimo elemento finito, tal que

$$N_i^e = 1 \quad \text{para } i = 1, 2,$$

então,

$$\phi^1 N_i^1 \frac{dH^1}{dz} \Big|_{z=z_1^1} = \alpha(0) \frac{dp}{dz} \Big|_{z=0} \quad (3.47a)$$

e

$$\phi^M N_i^M \frac{dH^M}{dz} \Big|_{z=z_2^M} = \alpha(L) \frac{dp}{dz} \Big|_{z=L}. \quad (3.47b)$$

A partir dos resultados apresentados em (3.47), os vetores $[g]$ podem ser reescritos a partir das derivadas direcionais dos campos H_x e H_y , nos contornos $z = 0$ e $z = L$, conforme abaixo,

$$[g_x] = \left[\left(-\phi_{xx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_{z=0} + \phi_{xy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right), \dots, \left(\phi_{xx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_{z=L} - \phi_{xy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{z=L} \right) \right], \quad (3.48a)$$

$$[g_y] = \left[\left(-\phi_{yy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \phi_{yx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_{z=0} \right), \dots, \left(\phi_{yy} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{z=L} - \phi_{yx} \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_{z=L} \right) \right]. \quad (3.48b)$$

3.5 Condições de contorno

A solução fechada do sistema de equações (3.44) só pode ser obtida a partir da determinação das condições de Neumann nos contornos $z = 0$ e $z = L$, conforme mostram as equações (3.48a) e (3.48b).

Como ilustra a Figura 3-3, o guia anisotrópico estratificado, definido na região $0 < z < L$, é caracterizado pelo tensor $\bar{\bar{\epsilon}}_2(z)$ e é cercado pelas regiões anterior ($z < 0$) e posterior ($z > L$) – ambas compostas de materiais anisotrópicos, caracterizados pelos tensores $\bar{\bar{\epsilon}}_1(z)$ e $\bar{\bar{\epsilon}}_3(z)$, respectivamente. As condições de Neumann, para o campo magnético, serão obtidas a partir das condições de contorno, que impõem a continuidade dos campos tangenciais em uma interface livre de cargas. A continuidade dessas componentes tangenciais pode ser definida matematicamente, nos contornos $z = 0$ e $z = L$,

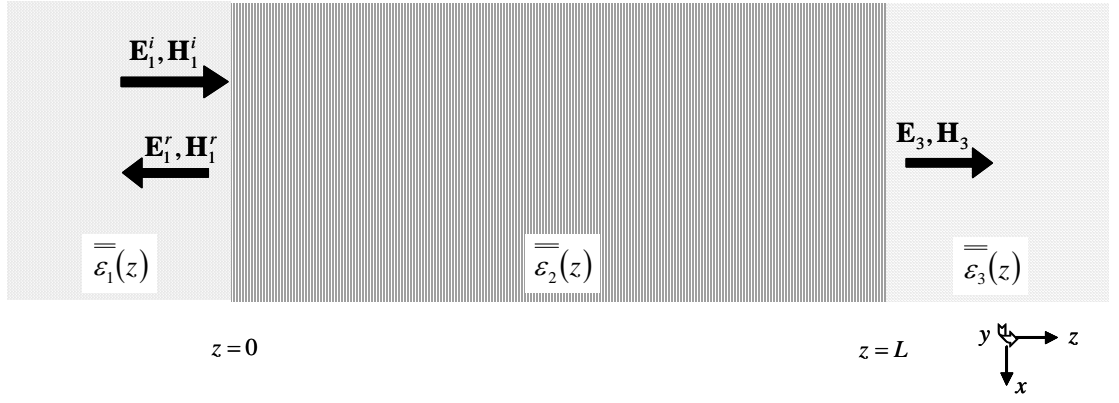


Figura 3-3: Ilustração do guia anisotrópico de característica dielétrica $\overline{\epsilon}_2(z)$ e envolvido pelos meios $\overline{\epsilon}_1(z)$ e $\overline{\epsilon}_3(z)$.

como

$$\left. \frac{\partial \mathbf{e}_{\parallel}}{\partial t} \right|_{z=0} = \hat{z} \times \left(\frac{1}{\overline{\epsilon}_2} \nabla \times \mathbf{h} \right) \Big|_{z=0}, \quad (3.49a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{e}_{\parallel}}{\partial t} \right|_{z=L} = \hat{z} \times \left(\frac{1}{\overline{\epsilon}_2} \nabla \times \mathbf{h} \right) \Big|_{z=L}, \quad (3.49b)$$

onde, $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{e}_{\parallel}(x, y, z, t)$ é a componente do campo elétrico tangencial à fronteira, $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x, y, z, t)$ é o campo magnético e \hat{z} o vetor unitário normal à interface de separação.

Neste trabalho foram analisados materiais não-magnéticos e com anisotropia elétrica transversal. Desta forma, em qualquer uma das regiões, o tensor permeabilidade relativa é escalar e unitário, $\overline{\mu}_r = 1$, enquanto a permissividade relativa pode ser representada pelo tensor $\overline{\epsilon}_r$, onde

$$\overline{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}(z) & \epsilon_{xy}(z) & 0 \\ \epsilon_{yx}(z) & \epsilon_{yy}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}(z) \end{bmatrix}.$$

O tensor $\overline{\phi}_r$, definido na equação (3.21c), pode ser escrito como

$$\overline{\phi}_r = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(z) & \phi_{xy}(z) & 0 \\ \phi_{yx}(z) & \phi_{yy}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz}(z) \end{bmatrix}.$$

Assim, a região anterior – $z < 0$, é caracterizada pelo tensor $\overset{=1}{\phi}_r$, tal que

$$\overset{=1}{\phi}_r = \frac{1}{\overset{=1}{\epsilon}_r} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}^1(z) & \phi_{xy}^1(z) & 0 \\ \phi_{yx}^1(z) & \phi_{yy}^1(z) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz}^1(z) \end{bmatrix}; \quad (3.50a)$$

para a região $0 < z < L$,

$$\overset{=2}{\phi}_r = \frac{1}{\overset{=2}{\epsilon}_r} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}^2(z) & \phi_{xy}^2(z) & 0 \\ \phi_{yx}^2(z) & \phi_{yy}^2(z) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz}^2(z) \end{bmatrix}; \quad (3.50b)$$

e para a região posterior – $z > L$,

$$\overset{=3}{\phi}_r = \frac{1}{\overset{=3}{\epsilon}_r} = \begin{bmatrix} \phi_{xx}^3(z) & \phi_{xy}^3(z) & 0 \\ \phi_{yx}^3(z) & \phi_{yy}^3(z) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz}^3(z) \end{bmatrix}. \quad (3.50c)$$

A partir das equações (3.50a) e (3.50b), a equação (3.49a), que define a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico no contorno $z = 0$, pode ser escrita, no domínio da frequência, como

$$\hat{z} \times \left[\overset{=1}{\phi}_r \nabla \times \mathbf{H}^1 \right] = \hat{z} \times \left[\overset{=2}{\phi}_r \nabla \times \mathbf{H}^2 \right], \quad (3.51)$$

onde \mathbf{H}^1 é o fasor campo magnético na região $z < 0$, \mathbf{H}^2 é o fasor campo magnético na região $0 < z < L$. Da mesma forma, utilizando as equações (3.50b) e (3.50c), a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico em $z = L$, definida pela equação (3.49b), pode ser expressa, na forma fasorial, como

$$\hat{z} \times \left[\overset{=2}{\phi}_r \nabla \times \mathbf{H}^2 \right] = \hat{z} \times \left[\overset{=3}{\phi}_r \nabla \times \mathbf{H}^3 \right], \quad (3.52)$$

onde \mathbf{H}^3 é o fasor campo magnético na região $z > L$.

Assumindo que o guia é excitado por uma onda linearmente polarizada, e tendo em vista que não há acoplamento da componente h_z , conforme discutido no capítulo anterior, pode-se assumir que o campo magnético, que constitui a onda que incide na fronteira $z = 0$, é composto apenas das componentes transversais à direção de propagação, isto é,

$$h_x(x, y, z, 0) \neq 0, \quad (3.53a)$$

$$h_y(x, y, z, 0) \neq 0, \quad (3.53b)$$

$$h_z(x, y, z, 0) = 0. \quad (3.53c)$$

Na forma fasorial, esses campos podem ser escritos como

$$\mathbf{H}^1 = H_x^1 \hat{x} + H_y^1 \hat{y}, \quad (3.54)$$

e

$$\mathbf{H}^2 = H_x^2 \hat{x} + H_y^2 \hat{y}, \quad (3.55)$$

onde H_x^1 e H_y^1 são as componentes do campo magnético na região $z < 0$, definidas no Apêndice B, e H_x^2 , H_y^2 são as componentes do campo magnético interior da estrutura anisotrópica, incógnitas a serem determinadas. A partir da discussão anterior, pode-se afirmar que a onda transmitida para a região $z > L$ possui, de forma geral, polarização circular e seu campo magnético pode ser escrito na forma

$$\mathbf{H}^3 = H_x^3 \hat{x} + H_y^3 \hat{y},$$

onde H_x^3 e H_y^3 , componentes transversais do campo magnético, foram definidas no Apêndice B.

Assim, a partir da equação de continuidade (3.51), considerando (3.50a), (3.50b), (3.54) e (3.55), as condições de Neumann para os campos H_x^2 , H_y^2 , na fronteira $z = 0$, podem ser obtidas como função dos campos H_x^1 e H_y^1 , tal que

$$\left. \frac{\partial H_y^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \Gamma_1^0 \left. \frac{\partial H_y^1}{\partial z} \right|_{z=0} + \Gamma_2^0 \left. \frac{\partial H_x^1}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3.56a)$$

$$\left. \frac{\partial H_x^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \Gamma_3^0 \left. \frac{\partial H_y^1}{\partial z} \right|_{z=0} + \Gamma_4^0 \left. \frac{\partial H_x^1}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3.56b)$$

onde os coeficientes Γ^0 são definidos como

$$\Gamma_1^0 = -\frac{1}{\Delta^0} (\phi_{xy}^2 \phi_{yx}^1 - \phi_{yy}^2 \phi_{xx}^1) \Big|_{z=0}, \quad (3.57a)$$

$$\Gamma_2^0 = -\frac{1}{\Delta^0} (\phi_{yy}^2 \phi_{xy}^1 - \phi_{xy}^2 \phi_{yy}^1) \Big|_{z=0}, \quad (3.57b)$$

$$\Gamma_3^0 = -\frac{1}{\Delta^0} (\phi_{xx}^2 \phi_{yx}^1 - \phi_{yx}^2 \phi_{xx}^1) \Big|_{z=0}, \quad (3.57c)$$

$$\Gamma_4^0 = -\frac{1}{\Delta^0} (\phi_{yx}^2 \phi_{xy}^1 - \phi_{xx}^2 \phi_{yy}^1) \Big|_{z=0}, \quad (3.57d)$$

e

$$\Delta^0 = (\phi_{xx}^2 \phi_{yy}^2 - \phi_{xy}^2 \phi_{yx}^2) \Big|_{z=0}. \quad (3.57e)$$

Da mesma forma, as condições de Neumann para os campos H_x^2 , H_y^2 , na fronteira $z = L$, podem ser obtidas como função dos campos H_x^3 e H_y^3 , tal que

$$\left. \frac{\partial H_y^2}{\partial z} \right|_{z=L} = \Gamma_1^L \left. \frac{\partial H_y^3}{\partial z} \right|_{z=L} + \Gamma_2^L \left. \frac{\partial H_x^3}{\partial z} \right|_{z=L}, \quad (3.58a)$$

$$\left. \frac{\partial H_x^2}{\partial z} \right|_{z=L} = \Gamma_3^L \left. \frac{\partial H_y^3}{\partial z} \right|_{z=L} + \Gamma_4^L \left. \frac{\partial H_x^3}{\partial z} \right|_{z=L}, \quad (3.58b)$$

onde os coeficientes Γ^L são definidos como

$$\Gamma_1^L = -\frac{1}{\Delta^L} (\phi_{xy}^2 \phi_{yx}^3 - \phi_{yy}^2 \phi_{xx}^3) \Big|_{z=L}, \quad (3.59a)$$

$$\Gamma_2^L = -\frac{1}{\Delta^L} (\phi_{yy}^2 \phi_{xy}^3 - \phi_{xy}^2 \phi_{yy}^3) \Big|_{z=L}, \quad (3.59b)$$

$$\Gamma_3^L = -\frac{1}{\Delta^L} (\phi_{xx}^2 \phi_{yx}^3 - \phi_{yx}^2 \phi_{xx}^3) \Big|_{z=L}, \quad (3.59c)$$

$$\Gamma_4^L = -\frac{1}{\Delta^L} (\phi_{yx}^2 \phi_{xy}^3 - \phi_{xx}^2 \phi_{yy}^3) \Big|_{z=L}, \quad (3.59d)$$

e

$$\Delta^L = (\phi_{xx}^2 \phi_{yy}^2 - \phi_{xy}^2 \phi_{yx}^2) \Big|_{z=L}. \quad (3.59e)$$

As derivadas dos campos H_x^1 , H_y^1 , H_x^3 e H_y^3 podem ser obtidas, a partir das equações (B.17) e (B.20),

$$\left. \frac{\partial H_x^1(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ H_x^1(0) - j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- H_y^1(0) + j H_0 \Delta \gamma_1^-, \quad (3.60a)$$

$$\left. \frac{\partial H_y^1(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- H_x^1(0) + \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ H_y^1(0) + H_0 \Delta \gamma_1^+, \quad (3.60b)$$

$$\left. \frac{\partial H_x^3(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = -\frac{1}{2} \Delta \gamma_3^+ H_x^3(L) + j \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^- H_y^3(L), \quad (3.60c)$$

$$\left. \frac{\partial H_y^3(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = -j \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^- H_x^3(L) - \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^+ H_y^3(L), \quad (3.60d)$$

onde $H_x^1(0)$, $H_y^1(0)$, $H_x^3(L)$ e $H_y^3(L)$ são incógnitas a serem determinadas.

É conveniente observar que os campos em qualquer ponto do domínio são incógnitas a serem determinadas e, portanto, os índices que identificam os campos em cada uma das regiões podem ser suprimidos. Contudo, as equações (3.35) e (3.36) apresentam os campos magnéticos escritos como função das incógnitas a_x^e e a_y^e , sob a combinação linear,

$$H_x(z) = \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^2 N_j^e(z) a_{xj}^e$$

$$H_y(z) = \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^2 N_j^e(z) a_{yj}^e.$$

Contudo, conforme mostrado no Capítulo 2, as funções de forma são unitárias nos nós locais, isto é,

$$N_1^1(0) = N_2^M(L) = 1.$$

Assumindo ainda que,

$$a_{x1}^1 = a_{x1},$$

$$a_{y1}^1 = a_{y1},$$

$$a_{x2}^M = a_{xN},$$

$$a_{y2}^M = a_{yN},$$

então, os campos H_x e H_y nos contornos podem ser escritos em função das incógnitas a_x e a_y , respectivamente, tal que:

$$H_x(0) = a_{x1},$$

$$H_y(0) = a_{y1},$$

$$H_x(L) = a_{xN},$$

$$H_y(L) = a_{yN}.$$

A partir dessas considerações, as equações (3.60) podem ser reescritas como

$$\left. \frac{\partial H_x^1(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ a_{x1} - j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- a_{y1} + j H_0 \Delta \gamma_1^-, \quad (3.61a)$$

$$\left. \frac{\partial H_y^1(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- a_{x1} + \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ a_{y1} + H_0 \Delta \gamma_1^+, \quad (3.61b)$$

$$\left. \frac{\partial H_x^3(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = -\frac{1}{2} \Delta \gamma_3^+ a_{xN} + j \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^- a_{yN}, \quad (3.61c)$$

$$\left. \frac{\partial H_y^3(z)}{\partial z} \right|_{z=L} = -j \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^- a_{xN} - \frac{1}{2} \Delta \gamma_3^+ a_{yN}, \quad (3.61d)$$

Utilizando as equações (3.56), (3.58), (3.61) e as condições de Neumann nas fronteiras que delimitam o guia anisotrópico, os vetores $[g]$, que estabelecem as condições de contorno para o sistema (3.44), são, finalmente, determinados como função dos coeficientes a_{y1} , a_{x1} , a_{yN} e a_{xN} , na forma

$$[g_x] = P_y^0 a_{y1} + P_x^0 a_{x1} + P^0 H_0, \dots, P_y^L a_{yN} + P_x^L a_{xN}, \quad (3.62a)$$

$$[g_y] = Q_y^0 a_{y1} + Q_x^0 a_{x1} + Q^0 H_0, \dots, Q_y^L a_{yN} + Q_x^L a_{xN}, \quad (3.62b)$$

onde

$$P_y^0 = \frac{1}{2\Delta^0} [j \Delta \gamma_1^- (\phi_{xx}^2 \Gamma_2^0 - \phi_{xy}^2 \Gamma_4^0) + \Delta \gamma_1^+ (-\phi_{xx}^2 \Gamma_1^0 + \phi_{xy}^2 \Gamma_3^0)], \quad (3.63a)$$

$$P_x^0 = \frac{1}{2\Delta^0} [j\Delta\gamma_1^- (-\phi_{xx}^2\Gamma_1^0 - \phi_{xy}^2\Gamma_3^0) + \Delta\gamma_1^+ (-\phi_{xx}^2\Gamma_2^0 + \phi_{xy}^2\Gamma_4^0)] , \quad (3.63b)$$

$$P_y^L = \frac{1}{2\Delta^L} [j\Delta\gamma_3^- (-\phi_{xx}^2\Gamma_2^L - \phi_{xy}^2\Gamma_4^L) + \Delta\gamma_3^+ (-\phi_{xx}^2\Gamma_1^L + \phi_{xy}^2\Gamma_3^L)] , \quad (3.63c)$$

$$P_x^L = \frac{1}{2\Delta^L} [j\Delta\gamma_3^- (-\phi_{xx}^2\Gamma_1^L + \phi_{xy}^2\Gamma_3^L) + \Delta\gamma_3^+ (-\phi_{xx}^2\Gamma_2^L + \phi_{xy}^2\Gamma_4^L)] , \quad (3.63d)$$

$$P^0 = \frac{1}{\Delta^0} [j\Delta\gamma_1^- (-\phi_{xx}^2\Gamma_2^0 + \phi_{xy}^2\Gamma_4^0) + \Delta\gamma_1^+ (\phi_{xx}^2\Gamma_1^0 - \phi_{xy}^2\Gamma_3^0)] , \quad (3.63e)$$

$$Q_y^0 = \frac{1}{2\Delta^0} [j\Delta\gamma_1^- (\phi_{yy}^2\Gamma_4^0 - \phi_{yx}^2\Gamma_2^0) + \Delta\gamma_1^+ (-\phi_{yy}^2\Gamma_3^0 + \phi_{yx}^2\Gamma_1^0)] , \quad (3.63f)$$

$$Q_x^0 = \frac{1}{2\Delta^0} [j\Delta\gamma_1^- (-\phi_{yy}^2\Gamma_3^0 + \phi_{yx}^2\Gamma_1^0) + \Delta\gamma_1^+ (-\phi_{yy}^2\Gamma_4^0 + \phi_{yx}^2\Gamma_2^0)] , \quad (3.63g)$$

$$Q_y^L = \frac{1}{2\Delta^L} [j\Delta\gamma_3^- (\phi_{yy}^2\Gamma_4^L - \phi_{yx}^2\Gamma_2^L) + \Delta\gamma_3^+ (-\phi_{yy}^2\Gamma_3^L + \phi_{yx}^2\Gamma_1^L)] , \quad (3.63h)$$

$$Q_x^L = \frac{1}{2\Delta^L} [j\Delta\gamma_3^- (-\phi_{yy}^2\Gamma_3^L + \phi_{yx}^2\Gamma_1^L) + \Delta\gamma_3^+ (-\phi_{yy}^2\Gamma_4^L + \phi_{yx}^2\Gamma_2^L)] , \quad (3.63i)$$

$$Q^0 = \frac{1}{\Delta^0} [j\Delta\gamma_1^- (-\phi_{yy}^2\Gamma_4^0 + \phi_{yx}^2\Gamma_2^0) + \Delta\gamma_1^+ (\phi_{yy}^2\Gamma_3^0 - \phi_{yx}^2\Gamma_1^0)] . \quad (3.63j)$$

Capítulo 4

Estrutura Anisotrópica Estratificada

4.1 Introdução

A construção de dispositivos ópticos integrados, baseados em fenômenos magnetoópticos, é um tema que desafia pesquisadores há algum tempo. O efeito de isolamento óptico foi demonstrado por Fujita *et al.* [5] em guias de ondas ópticos construídos do composto Bi:YIG (bismuth-substituted yttrium iron garnet). Contudo, a complexidade do projeto, necessária para superar problemas de birefringência e sensibilidade de polarização, inviabilizaram sua implementação.

Para que o isolador, construído de um único bloco de material magnetoóptico, proporcione rotação de 45 graus do plano de polarização, as dimensões do dispositivo devem ser da ordem de milímetros, de modo que as perdas por difração tornam sua utilização proibitiva. Inoue *et al.* [15, 16] mostrou que é possível obter aumento da rotação Faraday utilizando cristais fotônicos compostos de um arranjo semiperiódico de lâminas magnetoópticas e dielétricas – tal estrutura, ilustrada na Figura 4-1, é genericamente denominada cristais fotônicos com descontinuidades na estrutura periódica. As construções estudadas por Inoue *et al.* continham apenas uma descontinuidade e, embora apresentassem uma elevada rotação do plano de polarização (em torno de 45 graus), o efeito magnetoóptico estava associado a uma baixa transmitância. A partir desses estudos, Sakaguchi e Sugimoto [17] investigaram cristais fotônicos com múltiplas descontinuidades e mostraram ser possível aumentar a transmissão, embora tais estruturas apresentassem uma relação inversa entre a intensidade da luz na saída e o efeito magnetoóptico. Buscando dissociar esses efeitos, Steel *et al.* [13] e Levy [20] mostraram que, através de um projeto adequado, é possível superar a interdependência entre efeito magnetoóptico e intensidade da luz na saída e, assim, construir cristais fotônicos de dimensões micrométricas que exibam elevada transmissão com rotação Faraday em torno de 45 graus.

Neste capítulo são estudadas as características espectrais das grades magnetoópticas como função dos parâmetros construtivos. São discutidas as influências do material, do número de descontinuidades na estrutura e da quantidade de lâminas utilizadas na composição de cada seção dos cristais. Para tanto, a partir do método dos elementos finitos foi desenvolvido um código em linguagem de programação Fortran. O sistema desenvolvido permite a análise de estruturas unidimensionais com até nove

descontinuidades em sua composição, possibilitando, ainda, a utilização de seis tipos diferentes de materiais. Os resultados apresentados neste trabalho contêm no máximo quatro descontinuidades e foram obtidos utilizando quatro materiais distintos. As estruturas foram espacialmente discretizadas com, aproximadamente, 2600 pontos, enquanto a varredura em frequência contou com 1200 pontos. Executando o sistema em um processador Pentium IV-2,66 GHz/Windows XP, 512 MBytes de memória RAM, 40 GBytes de HD, o esforço computacional máximo é de aproximadamente 50 segundos para cada estrutura.

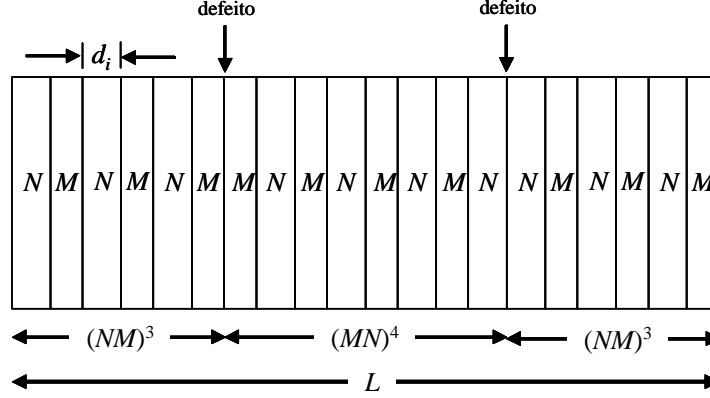


Figura 4-1: Representação esquemática unidimensional do arranjo laminar de cristais fotônicos com múltiplas descontinuidades. A figura mostra uma estrutura com duas descontinuidades, arranjada segundo a ordem $(NM)^3(MN)^4(NM)^3$.

4.2 Modelo da estrutura multicamadas

A geometria básica de um cristal fotônico unidimensional está ilustrada na Figura 4-1. O cristal é composto do arranjo seqüencial de uma célula básica NM ou MN – obtida da justaposição de lâminas isotrópica (N) e magnetoóptica (M). Em determinado ponto, uma lâmina é suprimida ou a seqüência é invertida, caracterizando o que denominou-se *descontinuidade na seqüência periódica* ou *inversão de fase*. A Figura 4-1 apresenta uma estrutura que possui duas descontinuidades e arranjada segundo a fórmula $(NM)^3(MN)^4(NM)^3$, onde (NM) e (MN) representam o tipo de célula e os sobrescritos indicam a quantidade de células utilizadas em cada seção. Desta forma, os cristais fotônicos serão identificados segundo a quantidade de células e número de descontinuidades, e identificados pela expressão $(NM)^a(MN)^b(NM)^c(MN)^b(NM)^a$ (ou variação da mesma), onde os parâmetros a , b , e c são números inteiros positivos. Esta forma de representação permite completa liberdade na determinação do comprimento total da estrutura e na posição relativa das descontinuidades. As lâminas que compõem cada célula possuem espessura de quarto-de-onda, isto é,

$$d_i = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_i}}, \quad (4.1)$$

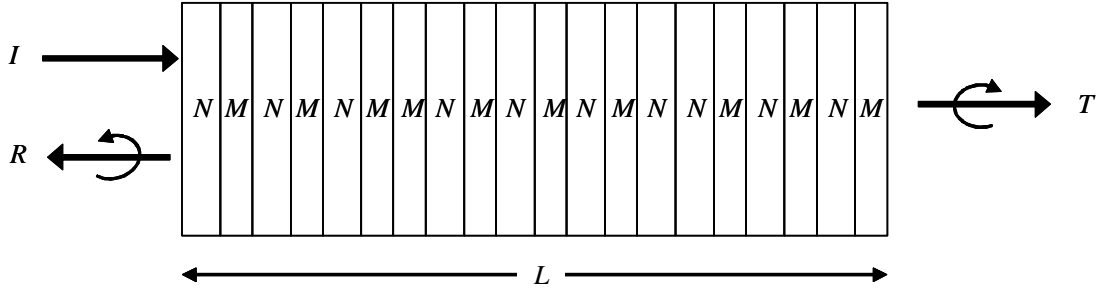


Figura 4-2: Modelo de funcionamento da estrutura multicamadas com características de bandas fotônicas proibidas (PGB).

onde λ_0 é o comprimento de onda central de operação; $i = N$ para material isotrópico e $i = M$ para o material magnetoóptico. O material isotrópico é caracterizado por sua permissividade relativa ϵ_N , enquanto nas lâminas magnetoópticas o tensor permissividade relativa $\bar{\bar{\epsilon}}_M$, especificado em (2.3), satisfaz à condição

$$\bar{\bar{\epsilon}}_M = \begin{bmatrix} \epsilon_M & j\delta & 0 \\ -j\delta & \epsilon_M & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

O princípio básico de funcionamento do dispositivo analisado é mostrado na Figura 4-2. Na entrada da estrutura é aplicada uma onda linearmente polarizada (I). Devido às características estratificadas e magnetoópticas do sistema, as ondas refletiva (R) e transmitida (T) são emitidas apenas em determinadas faixas de frequência, além de apresentarem rotação do plano de polarização em relação à onda incidente. Como mostram as equações (3.23), em estruturas magnetoópticas com anisotropia transversal os campos longitudinais à direção de propagação permanecem invariantes, havendo apenas o acoplamento das componentes transversais. Sendo assim, sem perda de generalidade, a onda incidente será considerada composta, apenas, das componentes E_x , E_y , H_x e H_y . A Figura 4-3 apresenta os campos eletromagnéticos que compõem a onda incidente para os modos TE e TM. Considerando que o campo magnético descreverá o comportamento das estruturas fotônicas, conforme discutido no Capítulo 3, os modos de propagação serão caracterizados, ao longo da estrutura, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{modo TE} &\longrightarrow H_y, \\ \text{modo TM} &\longrightarrow H_x, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde H_x e H_y são campos fasoriais linearmente polarizados, definidos pelas equações (3.35), e originados a partir da interação entre duas ondas circularmente polarizadas – à direita e à esquerda, conforme discutido no Capítulo 2.

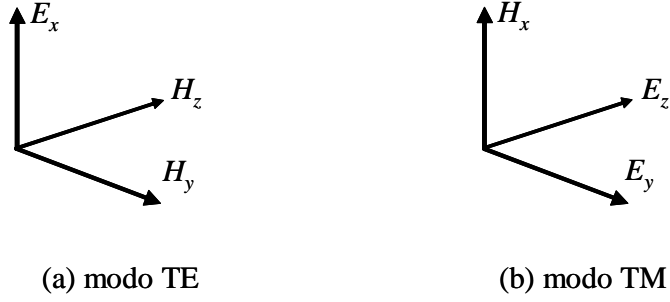


Figura 4-3: Campos eletromagnéticos dos modos que compõem a luz incidente: (a) modo TE; (b) modo TM.

4.3 Parâmetros analisados

Como a estrutura analisada, representada pela Figura 4-2, exibe bandas fotônicas proibidas (*photonic band gaps* – PBG's), a transmitância e a rotação Faraday são apresentadas como função do comprimento de onda de operação, calculadas a partir das expressões:

$$T(\lambda) = |a_{xN}(\lambda) + a_{yN}(\lambda)|, \quad (4.4)$$

e

$$\theta(\lambda) = \tan^{-1} \left[\frac{a_{xN}(\lambda)}{a_{yN}(\lambda)} \right], \quad (4.5)$$

onde a_{x1} , a_{xN} , a_{y1} e a_{yN} são as amplitudes dos campos magnéticos definidas nos contornos da estrutura e determinadas pela solução do sistema de equações (3.44). Além disso, a transmitância e a rotação Faraday das ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda, que compõem a onda linearmente polarizada na saída do cristal, definidas a partir das equações (2.4), podem ser calculadas por [19]:

$$T_+(\lambda) = |a_{yN}(\lambda) + ja_{xN}(\lambda)|, \quad (4.6)$$

$$\theta_+(\lambda) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(a_{yN}(\lambda) + ja_{xN}(\lambda))}{\text{Re}(a_{yN}(\lambda) + ja_{xN}(\lambda))} \right], \quad (4.7)$$

e

$$T_-(\lambda) = |a_{yN}(\lambda) - ja_{xN}(\lambda)|, \quad (4.8)$$

$$\theta_-(\lambda) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(a_{yN}(\lambda) - ja_{xN}(\lambda))}{\text{Re}(a_{yN}(\lambda) - ja_{xN}(\lambda))} \right]. \quad (4.9)$$

Assim, a transmitância e a rotação Faraday totais podem ser calculadas, de forma alternativa, por:

$$T(\lambda) = \frac{T_+(\lambda) - T_-(\lambda)}{2}, \quad (4.10)$$

$$\theta(\lambda) = \frac{\theta_+(\lambda) - \theta_-(\lambda)}{2}. \quad (4.11)$$

4.4 Influência da descontinuidade na resposta do cristal

Conforme apresentado no Capítulo 2, em um meio magnetoóptico uniforme (com o campo magnético de saturação orientado longitudinalmente à direção de propagação), dois modos circularmente polarizados são transmitidos com uma sutil diferença no comprimento dos caminhos ópticos, devido à birefringência magnética. Desta maneira, quando uma luz linearmente polarizada incide neste material seu plano de polarização é rotacionado durante a transmissão. A presença de uma ou mais descontinuidades na periodicidade do cristal cria uma ressonância de transmissão. Quando a luz incidente possui comprimento de onda próximo ao comprimento de onda de ressonância do cristal, uma grande quantidade de energia é armazenada no interior da estrutura, próxima às descontinuidades. A Figura 4-4 mostra a distribuição do campo magnético ao longo de uma região estratificada com uma descontinuidade. Observa-se que as maiores amplitudes de campo, e conseqüentemente a concentração de energia, ocorrem em torno de $6,4 \mu\text{m}$, ponto onde está localizada a descontinuidade do cristal. Este fenômeno acentua a diferença entre os caminhos ópticos das ondas circularmente polarizadas, provocando um aumento do efeito magnetoóptico total. A Figura 4-5 mostra a transmitância e a rotação Faraday das ondas circularmente polarizadas à direita (T_+ , θ_+) e à esquerda (T_- , θ_-), como função do comprimento de onda de operação, para uma estrutura com uma descontinuidade. Observa-se que na banda em torno da frequência de ressonância, as rotações Faraday dos modos circularmente polarizados apresentam acentuada diferença, conseqüência da alteração do caminho óptico experimentado por cada um dos modos. Da mesma forma, os modos circularmente polarizados apresentam ressonância de transmissão em diferentes frequências, sendo que a ressonância da luz linearmente polarizada ocorre em $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, onde $T_+(\lambda_0) = T_-(\lambda_0)$, como ilustra a Figura 4-6.

4.5 Resultados

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos para filmes finos construídos a partir dos compostos anisotrópicos *cerium-substituted yttrium iron garnet* (Ce-YIG) e *bismuth-substituted yttrium iron garnet* (Bi-YIG) e dos compostos anisotrópicos *gadolinium gallium garnet* (GGG) e *dióxido de silício* (SiO_2). As permissividades relativas dos compostos isotrópicos, em torno do comprimento de onda $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, são caracterizadas por: $\epsilon^{\text{SiO}_2} = 2,25$ e $\epsilon^{\text{GGG}} = 3,71$. Neste comprimento de onda, os compostos magnetoópticos apresentam as seguintes características [18, 19]: $\epsilon_M^{\text{Ce-YIG}} = \epsilon_{xx}^{\text{Ce-YIG}} = \epsilon_{yy}^{\text{Ce-YIG}} = 4,884$ e $\delta^{\text{Ce-YIG}} = 0,009$; $\epsilon_M^{\text{Bi-YIG}} = \epsilon_{xx}^{\text{Bi-YIG}} = \epsilon_{yy}^{\text{Bi-YIG}} = 4,75$ e

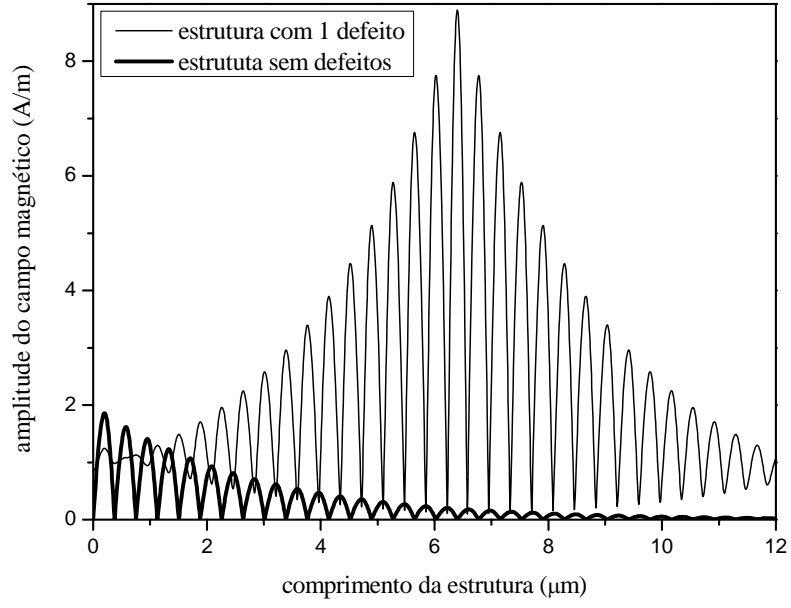


Figura 4-4: Distribuição do campo magnético ao longo da região estratificada. Estrutura com uma descontinuidade versus estrutura sem descontinuidade.

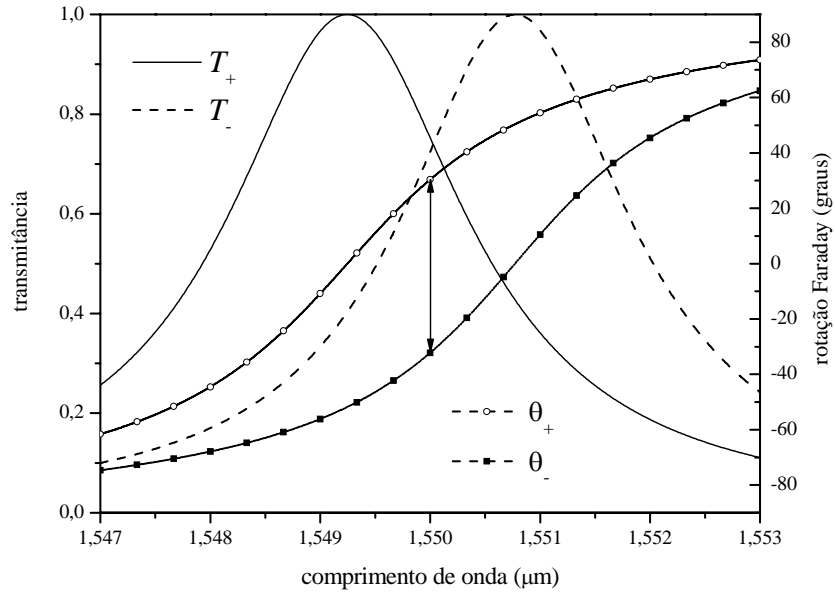


Figura 4-5: Resposta de uma grade magnetoóptica simétrica com uma descontinuidade - $(NM)^{17} (MN)^{17}$. Separação das contribuições das ondas circularmente polarizadas à direita (T_+ , θ_+) e à esquerda (T_- , θ_-).

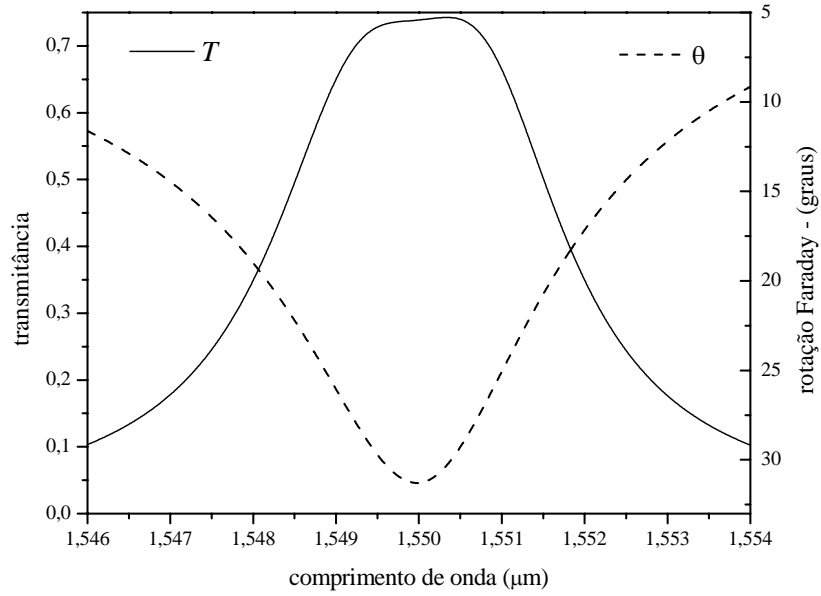


Figura 4-6: Resposta de uma grade magnetoóptica simétrica com uma descontinuidade - $(NM)^{17}(MN)^{17}$. Efeito total sobre a luz linearmente polarizada.

$$\delta_{\text{Bi-YIG}} = 0,00269.$$

Em todos os casos analisados, a rotação Faraday foi referenciada a partir do plano de polarização da luz incidente. Assim, se a estrutura é iluminada com uma luz com polarização TE, uma rotação de 90 graus no plano de polarização indica a conversão da luz incidente em uma luz com polarização puramente TM.

4.5.1 Sistemas com uma descontinuidade

A configuração das estruturas com uma descontinuidade, analisadas aqui, será descrita segundo a a ordem $(NM)^a(MN)^b$, ou simplesmente (a, b) . As Figuras 4-7, 4-8 e 4-9 apresentam as curvas de transmissão e rotação Faraday, como função do comprimento de onda - $T(\lambda)$ e $\theta(\lambda)$, respectivamente, para cristais construídos de células GGG/Ce-YIG e GGG/Bi-YIG e estruturadas segundo a ordem (17, 17), (22, 22) e (25, 25), respectivamente. Como pode ser observado, as estruturas compostas de GGG/Bi:YIG apresentam menor sensibilidade à variação do número de células que as compõe, embora apresentem redução da transmitância e aumento da rotação Faraday, à medida que células são acrescentadas à composição - conforme já observado anteriormente por outros pesquisadores [15, 16].

Os resultados da análise de simetria em estruturas do tipo $(NM)^a(MN)^b$, é apresenta nas Figuras 4-10 e 4-11, respectivamente. A estrutura $(NM)^{17}(MN)^{17}$ foi tomada como base e o parâmetro b é variado, tal que: $b = 18$ e $b = 25$. Os resultados mostram que, nesse tipo de construção, a adição assimétrica de células provoca um efeito similar ao do crescimento simétrico, isto é, aumento do efeito magnetoóptico e a conseqüente redução da transmissividade. Além do mais, tais efeitos são observados

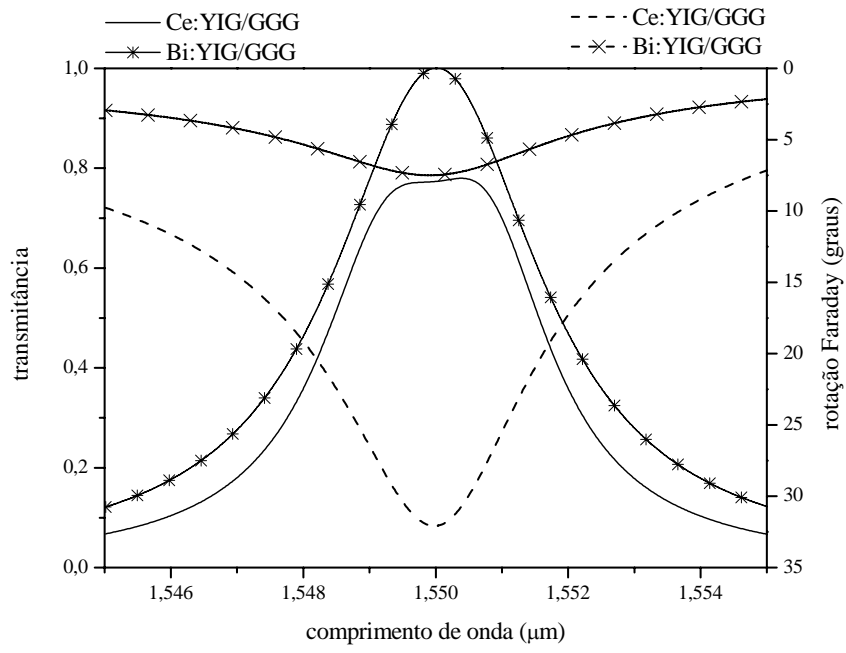


Figura 4-7: Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{17} (MN)^{17}$.

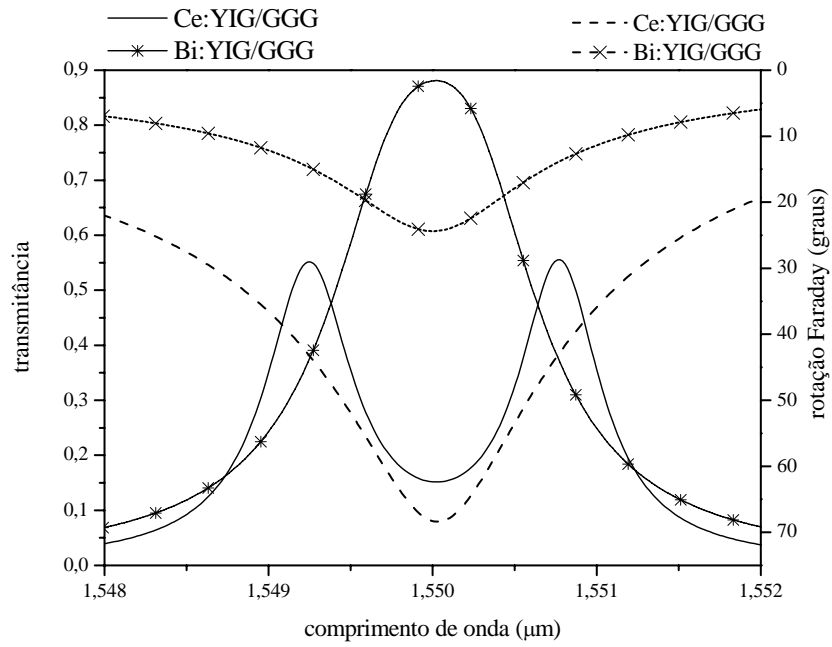


Figura 4-8: Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{22} (MN)^{22}$.

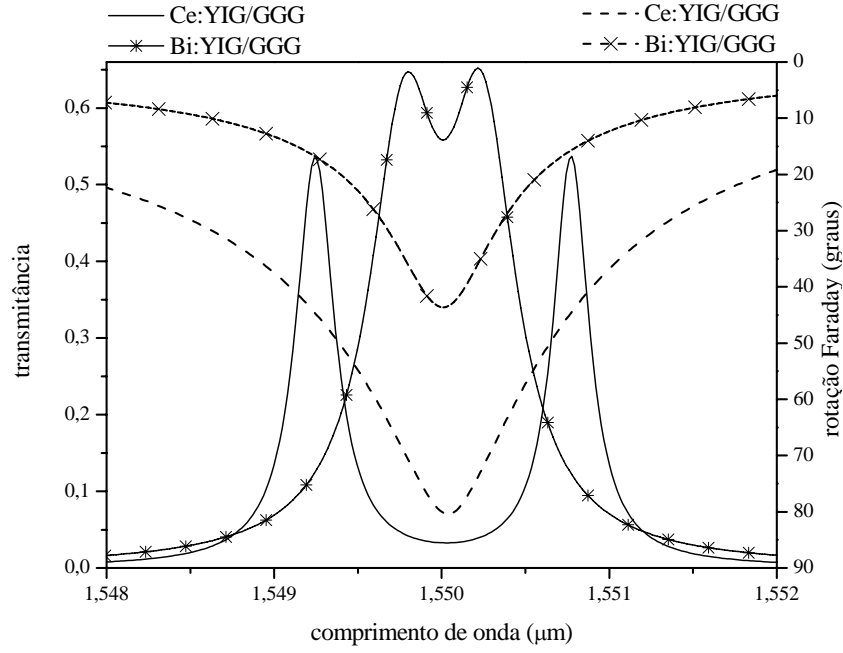


Figura 4-9: Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para uma estrutura com uma descontinuidade – $(NM)^{25}(MN)^{25}$.

tanto nas células GGG/Ce-YIG quanto nas GGG/Bi-YIG.

As duas análises mostram que os compostos GGG/Bi-YIG apresenta transmitância em torno de 100%, na frequência de ressonância, associada a uma rotação extremamente baixa. Já o composto GGG/Ce-YIG, apesar de apresentar menor transmitância, oferece um efeito magnetoóptico mais acentuado.

4.5.2 Sistemas com duas descontinuidades

Como pode ser observado, as estruturas construídas com apenas uma descontinuidade possuem forte compromisso entre o coeficiente de transmissão e o efeito magnetoóptico e, portanto, a otimização de sua resposta espectral é bastante limitada. Investigando as características de transmissão em filtros de Bragg estratificados, compostos de materiais isotrópicos, Wei [24] mostrou ser possível otimizar a resposta espectral de tais estruturas utilizando uma configuração que apresenta duas ou mais descontinuidades na composição. O efeito da presença de duas descontinuidades no sistema magnetoóptico, é analisado em um sistema do tipo $(NM)^a(MN)^b(NM)^a$, composto de células GGG/Ce-YIG. A análise é feita em termos do parâmetro $f = \frac{b}{a}$, que estabelece a relação entre os comprimentos das seções externas e central; as Figuras 4-12 a 4-17 apresentam os resultados.

De forma similar ao que foi observado por Wei, no sistema anisotrópico com duas descontinuidades, a melhor resposta espectral ocorre para $f \simeq 2$. Contudo, a resposta é fortemente influenciada pelo número de células que compõem a estrutura, como mostram as Figuras 4-12 e 4-13. As Figuras 4-14 e 4-15 mostram o coeficiente de transmissão e o efeito magnetoóptico, respectivamente, a partir da

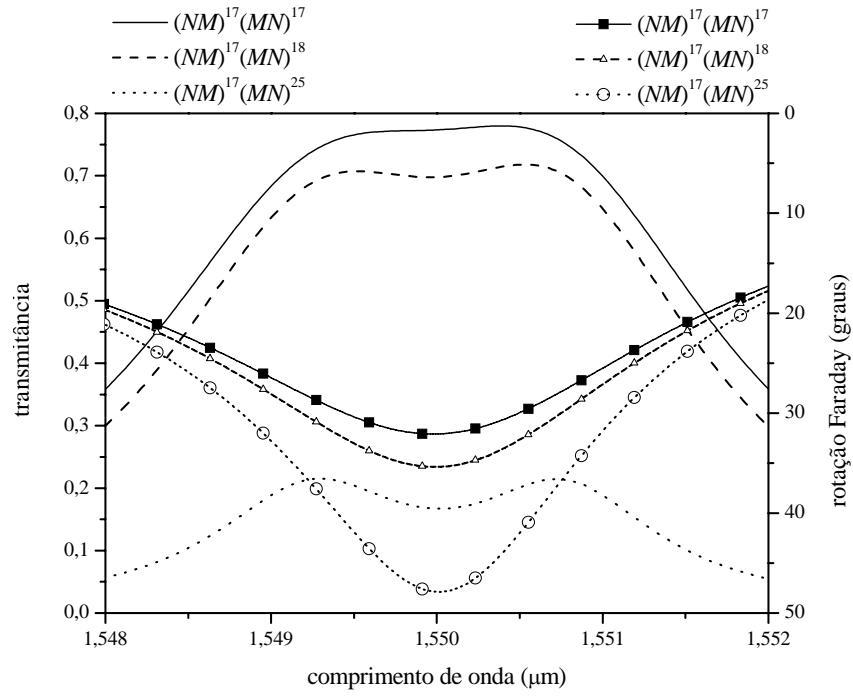


Figura 4-10: Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para células GGG/Ce-YIG. Comparação das estruturas $(NM)^{17}(MN)^{17}$, $(NM)^{17}(MN)^{18}$ e $(NM)^{17}(MN)^{25}$.

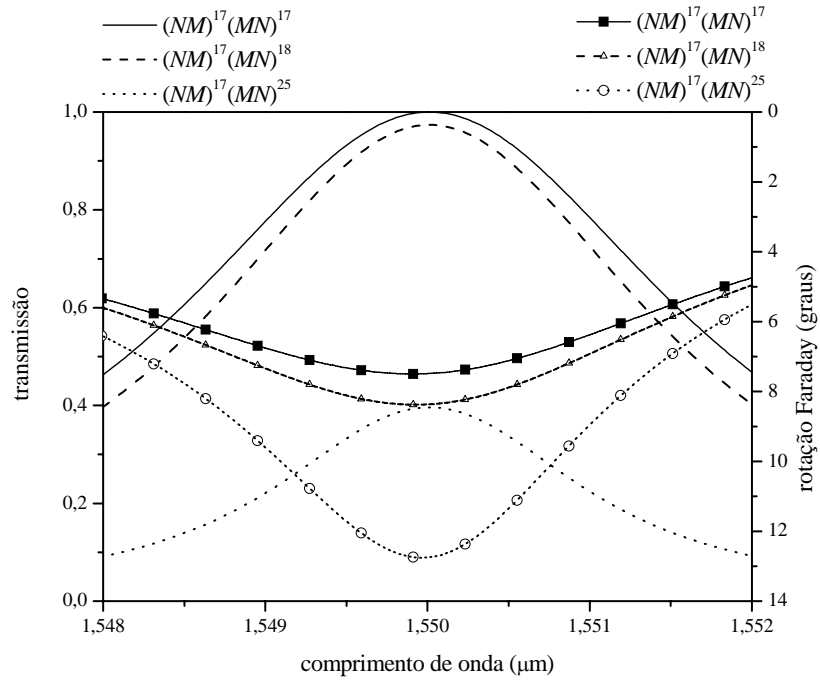


Figura 4-11: Coeficiente de transmissão e rotação Faraday para células GGG/Bi-YIG. Comparação entre as estruturas $(NM)^{17}(MN)^{17}$, $(NM)^{17}(MN)^{18}$ e $(NM)^{17}(MN)^{25}$.

variação do parâmetro a , mantendo-se constante a distância entre as descontinuidades. É interessante observar que o efeito magnetoóptico é mais sensível à variação do parâmetro b , isto é, à distância de separação das descontinuidades, como mostram as Figuras 4-16 e 4-17. Além disso, uma análise de simetria em relação à seção central, mostrou que tal efeito possui pouca influência na resposta do sistema.

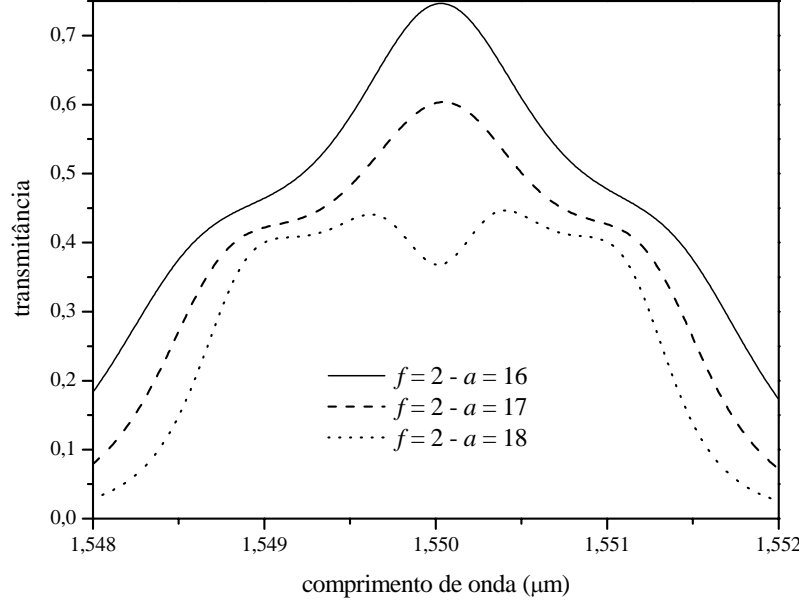


Figura 4-12: Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetros a e b são variados, mantendo $f = 2$.

4.5.3 Sistemas com três ou mais descontinuidades

Na tentativa de encontrar uma configuração que forneça alta transmissão, associada a uma maior largura de faixa e com rotação Faraday em torno de 45 graus na banda passante, foram analisadas configurações mais sofisticadas, contendo três e quatro descontinuidades.

As estruturas simétricas com três descontinuidades possuirão a configuração (a, b, b, a) ; as análises foram feitas a partir da influência do parâmetro $f = \frac{b}{a}$. A Figura 4-18 apresenta uma comparação entre estruturas com duas e três descontinuidades, construídas com a mesma taxa $f = 2,07$. Como pode ser observado, além do melhor desempenho com relação à rotação Faraday, a estrutura com três descontinuidades apresenta uma maior largura de faixa e uma excelente transmitância, em torno de 100%. Os resultados da influência do parâmetro f são apresentados na Figura 4-19. Assim como foi observado para as estruturas com duas descontinuidades, neste tipo de estrutura a melhor resposta é obtida para $f \simeq 2,07$, onde se conjuga a melhor relação entre a transmitância, largura de banda e o efeito magnetoóptico. Contudo, o aumento do número de células tende a prejudicar a resposta do sistema, reduzindo a banda passante deslocando a rotação Faraday do ponto ótimo, como mostra

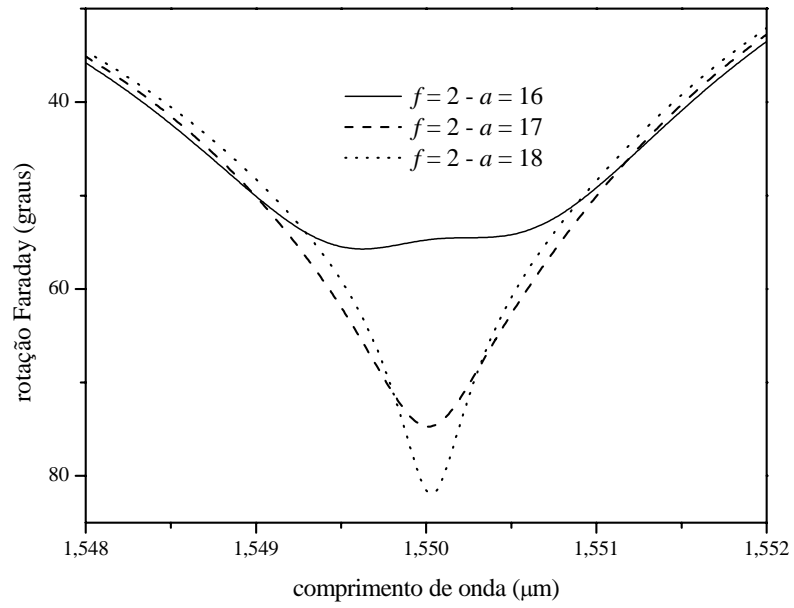


Figura 4-13: Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetros a e b são variados, mantendo $f = 2$.

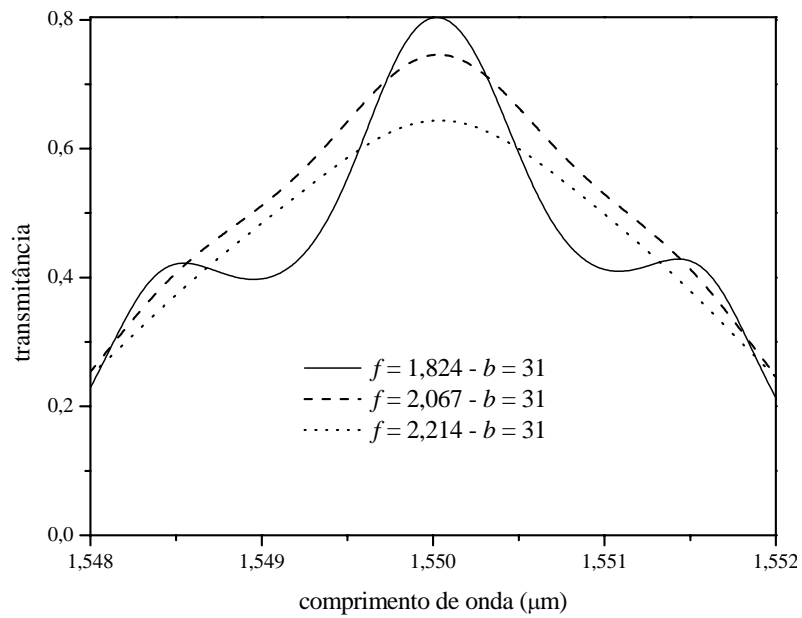


Figura 4-14: Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetro a é variado, para $b = 31$.

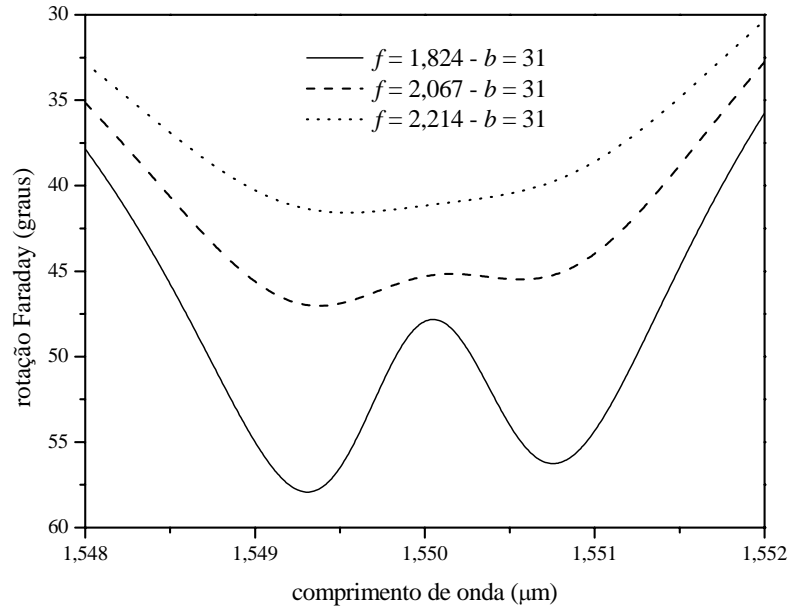


Figura 4-15: Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetro a é variado, para $b = 31$.

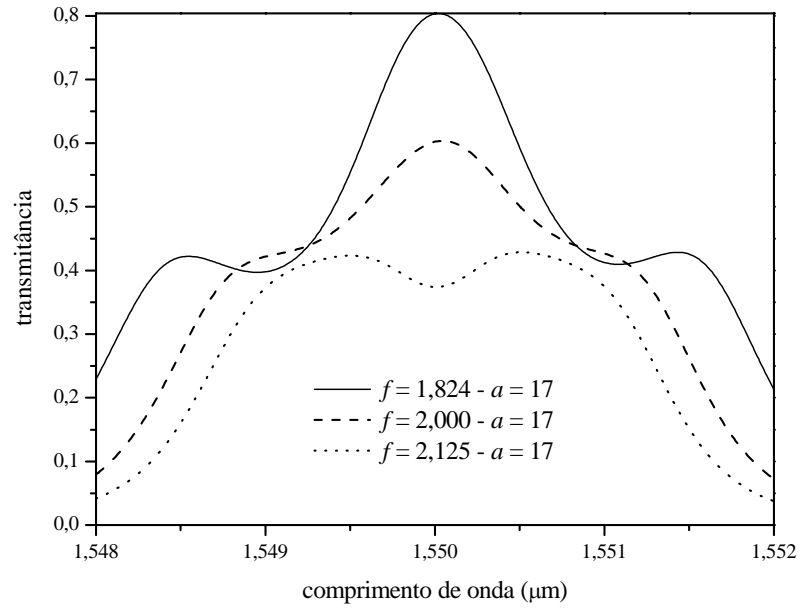


Figura 4-16: Coeficiente de transmissão para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetro b é variado, para $a = 17$.

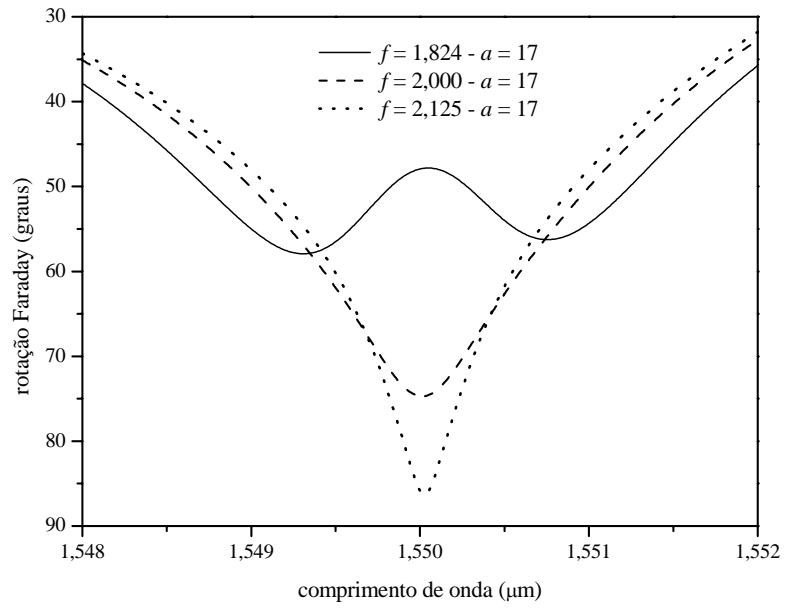


Figura 4-17: Rotação Faraday para uma estrutura $(NM)^a (MN)^b (NM)^a$ — parâmetro b é variado, para $a = 17$.

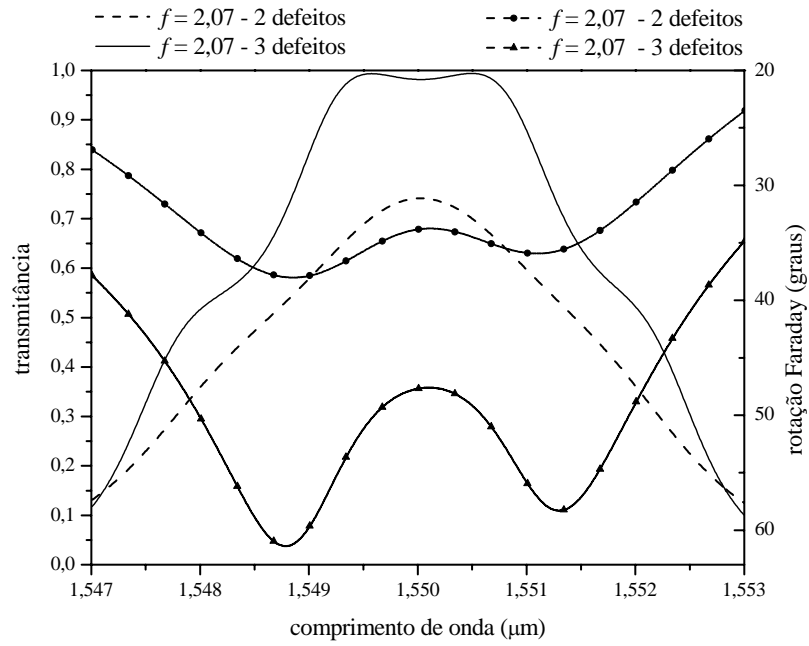


Figura 4-18: Comparação da resposta espectral entre estruturas com duas e três descontinuidades, mantendo constante o parâmetro f .

a Figura 4-20. Neste caso, o aumento do número de células, além de reduzir a largura de banda, aumenta significativamente a rotação Faraday.

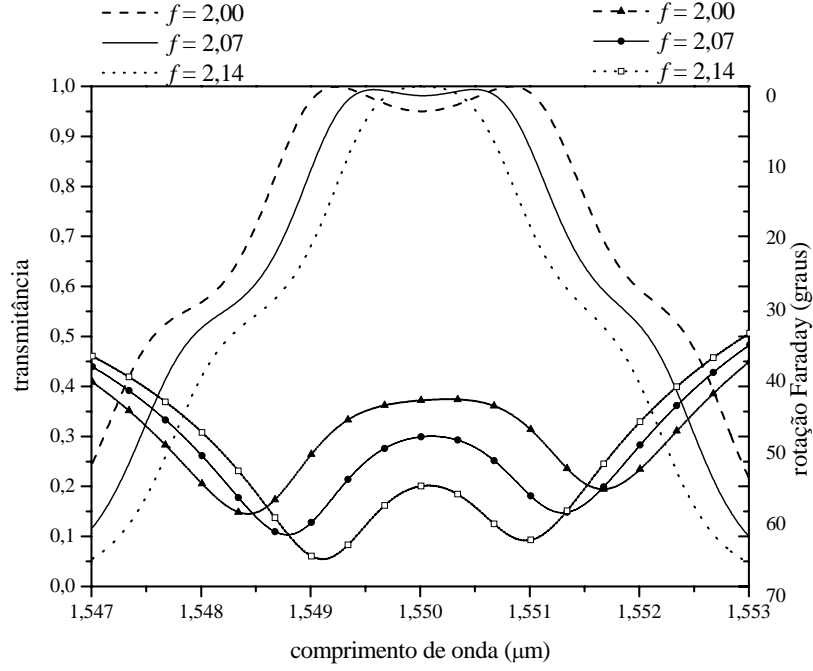


Figura 4-19: Análise da influência do parâmetro $f = b/a$ na resposta espectral da estrutura com três descontinuidades.

Ao contrário das configurações anteriores, a assimetria pode ser utilizada para ajustar a resposta do sistema. A partir dos resultados obtidos na Figura 4-19, uma sutil assimetria foi provocada, alterando o sistema; os resultados estão apresentados nas Figuras 4-21 e 4-22, considerando as alterações $(14, 29, 29, 14) \rightarrow (14, 28, 29, 14)$ e $(14, 30, 30, 14) \rightarrow (14, 28, 30, 14)$, respectivamente. Nos dois casos, a construção assimétrica, embora provoque pequena redução na transmissão, aumenta a banda passante e melhora a o efeito magnetoóptico do sistema.

Considerando os resultado acima, uma quarta descontinuidade foi introduzida na estrutura. Como pode ser observado pelos resultados apresentados na Figura 4-23, a construção com quatro descontinuidades, quando comparada com as construções anteriores, apesar de apresentar redução do coeficiente de transmissão, apresenta maior largura de banda associada a uma rotação Faraday muito próximo a 45 graus. Convém observar que nenhuma outra construção, com número inferior de descontinuidades, apresentou características espectrais de tal qualidade.

Utilizando a configuração simétrica básica $(NM)^a (MN)^b (NM)^c (MN)^b (NM)^a \rightarrow (a, b, c, b, a)$, o estudo de tais estruturas é feito a partir da influência dos parâmetros $f_1 = \frac{b}{a}$ e $f_2 = \frac{c}{a}$ na resposta do sistema. A exemplo dos resultados anteriores, a melhor resposta é obtida para $f \simeq 2,07$. Contudo, os parâmetros f_1 e f_2 cumprem diferentes papéis na resposta desse sistema. As Figuras 4-24 e 4-25 mostram, respectivamente, a influência de f_1 e f_2 na resposta espectral, tomando como referência a configuração $(12, 26, 28, 26, 12)$, apresentada em linha cheia. Enquanto a variação crescente de f_2

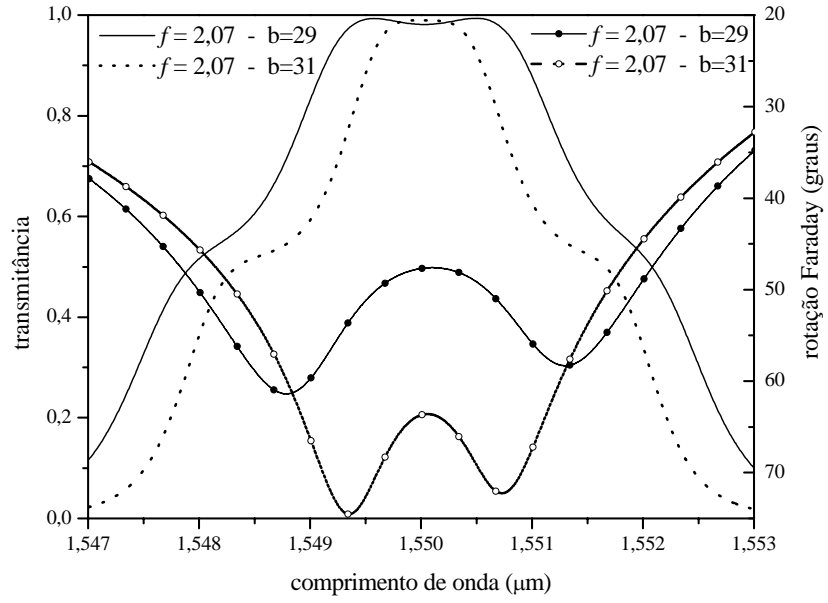


Figura 4-20: Análise da influência do número de células na resposta espectral da estrutura com três descontinuidades.

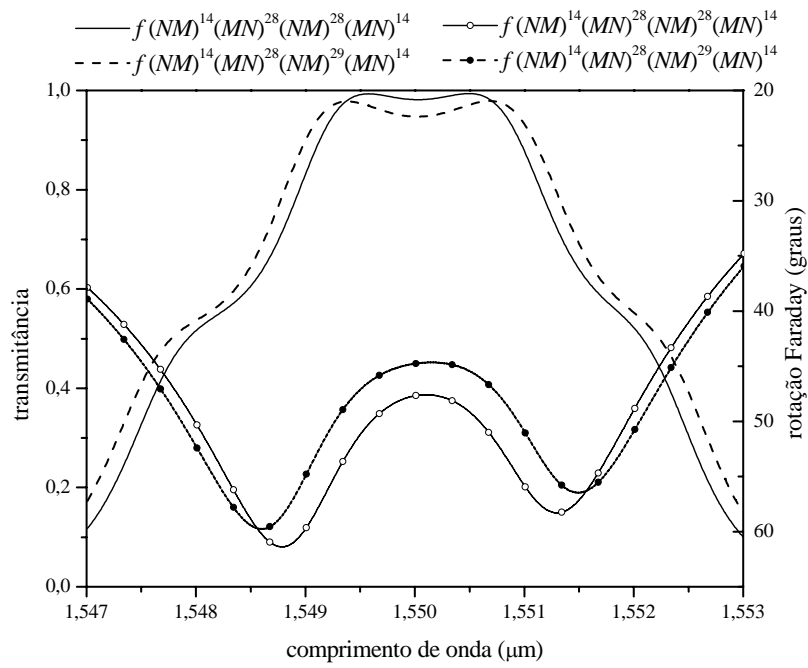


Figura 4-21: Efeito provocado pela assimetria. Estrutura $NM^{14}(MN)^{29}(NM)^{29}(MN)^{14}$ alterada para $(NM)^{14}(MN)^{28}(NM)^{29}(MN)^{14}$.

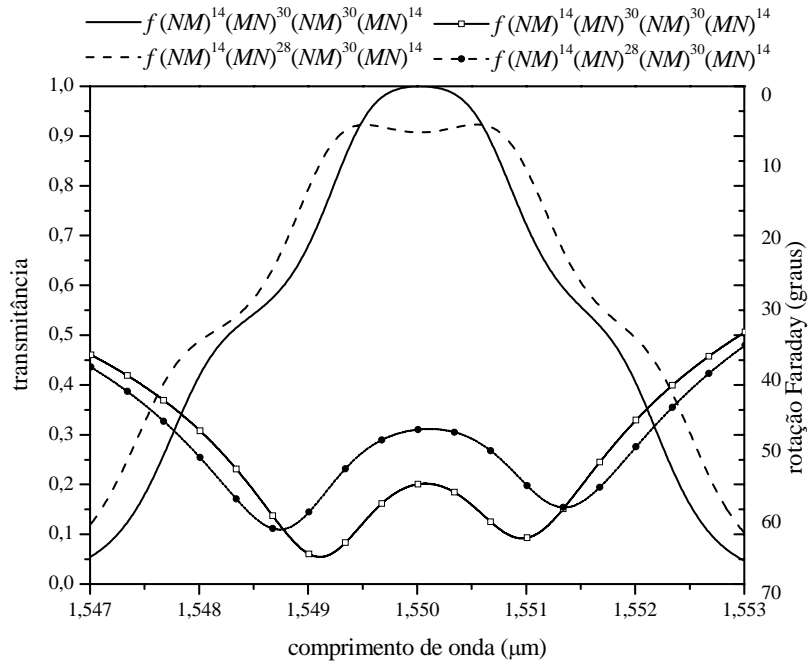


Figura 4-22: Efeito provocado pela assimetria. Estrutura $(NM)^{14}(MN)^{30}(NM)^{30}(MN)^{14}$ alterada para $(NM)^{14}(MN)^{28}(NM)^{30}(MN)^{14}$.

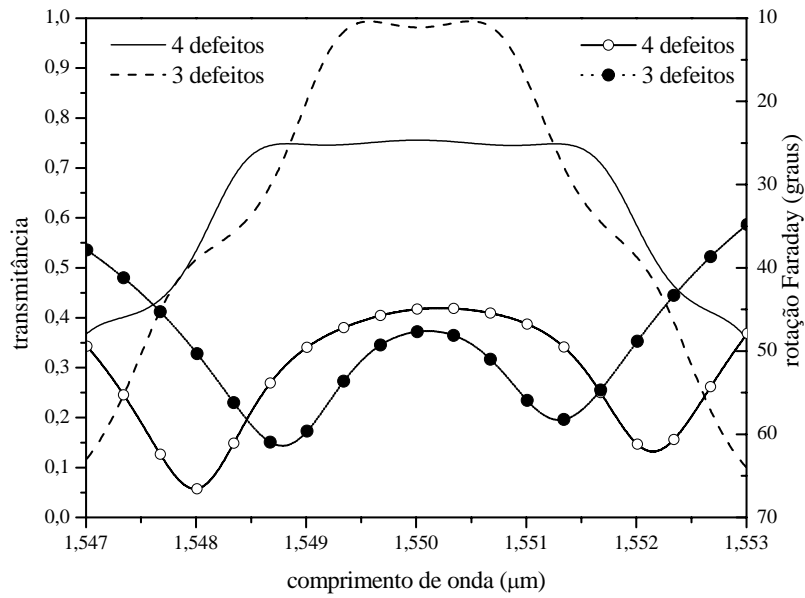


Figura 4-23: Comparação da resposta espectral de uma estrutura com três e quatro descontinuidades.

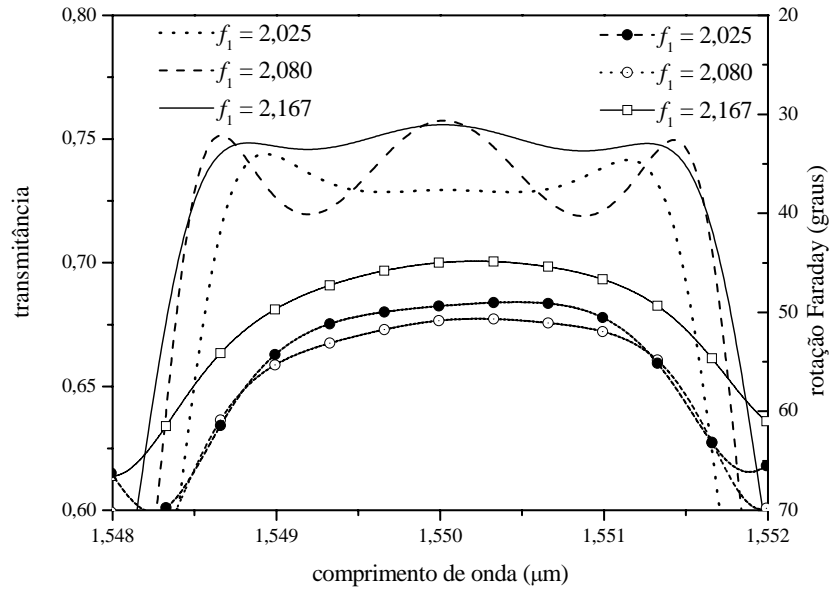


Figura 4-24: Variação do parâmetro f_1 em uma estrutura com quatro descontinuidades.

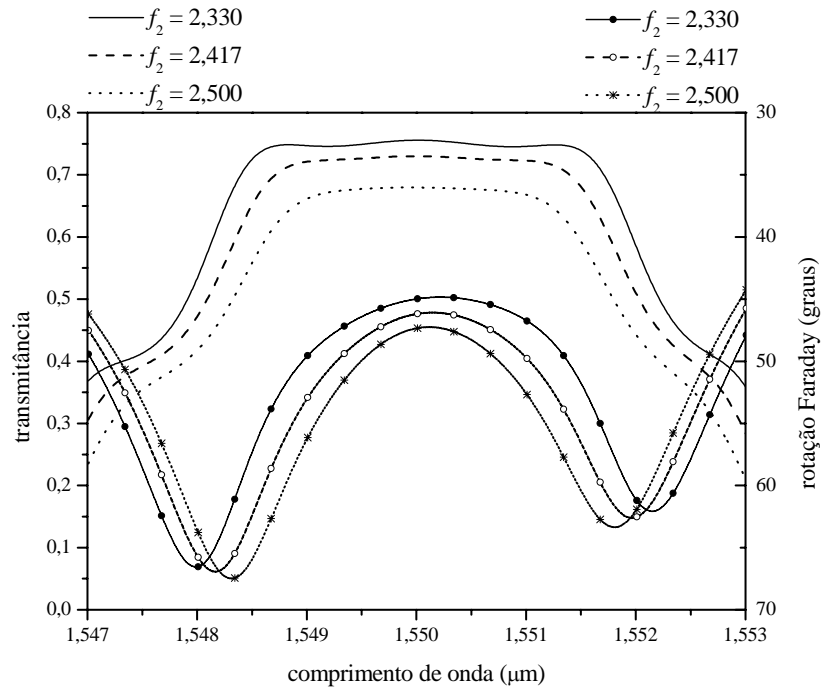


Figura 4-25: Variação do parâmetro f_2 em uma estrutura com quatro descontinuidades.

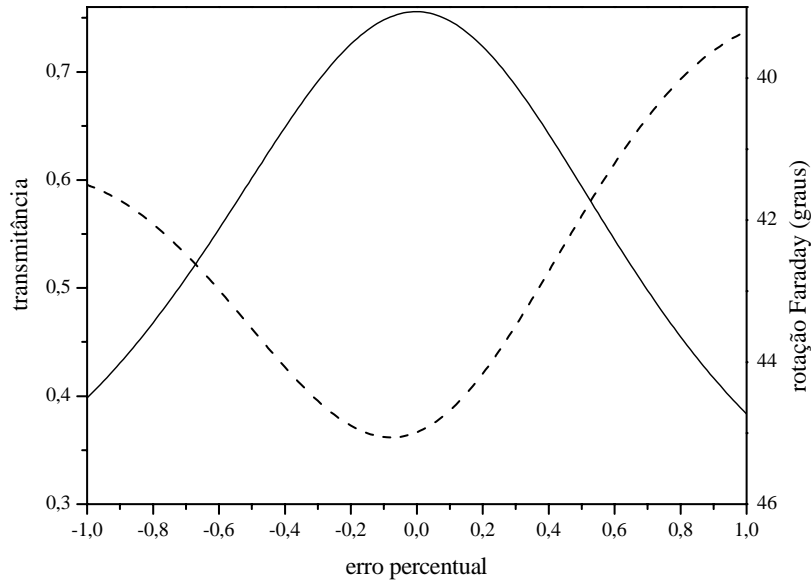


Figura 4-26: Variação da transmitância (curva cheia) e da rotação Faraday (curva pontilhada) em função do erro percentual da espessura da lâminas que compõem a célula.

atua de modo a reduzir a amplitude, o parâmetro f_1 afeta fortemente a ondulação (*ripple*) do coeficiente de transmissão. Como era de se esperar, o efeito magnetoóptico mostra-se sensível a tais parâmetros, sendo que a variação crescente de f_1 e f_2 acentua o desvio do ângulo de rotação em relação ao ponto de máximo (na frequência de ressonância) e, conseqüentemente, reduz a banda passante.

Os estudos apresentados acima estão relacionados com o projeto das estruturas magnetoópticas. Entretanto, considerando a possibilidade do deslocamento das máscaras de construção e conseqüente alteração no tamanho da células que compõem o cristal, foram realizadas simulações para analisar a influência da flutuação na espessuras das lâminas, sobre a resposta espectral do sistema em questão. A Figura 4-26 mostra a variação da transmitância e da rotação Faraday, na frequência de $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, em função do erro percentual na espessura das lâminas para uma estrutura de quatro descontinuidades. Observa-se a grande sensibilidade da resposta espectral da estrutura em relação a este parâmetro, uma vez que uma variação percentual acima de 0,3% compromete completamente a resposta do sistema. A variação da transmitância e rotação Faraday como função da frequência são apresentados na Figura 4-27 para flutuações percentuais $\Delta d_M = 0,3\%$ e $\Delta d_M = 0,4\%$. Conforme observado, tais flutuações provocam variações na resposta espectral do sistema, afetando tanto transmitância (provocando redução da amplitude e assimetria em relação ao comprimento de onda central de operação) quanto a rotação Faraday, visto que o ângulo de rotação diminui à medida que o desvio Δd_M aumenta.

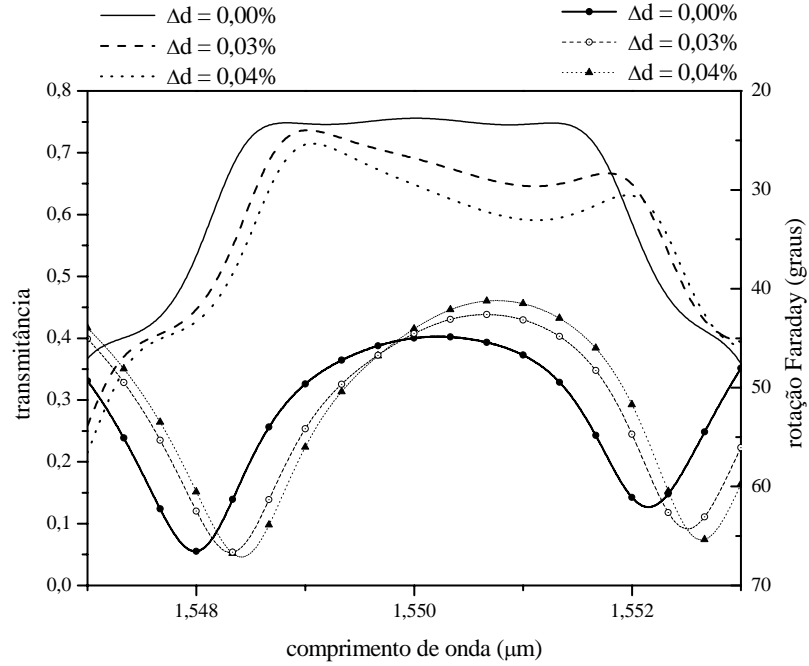


Figura 4-27: Efeito da variação da espessura das lâminas sobre a resposta espectral do sistema de quatro descontinuidades.

4.6 Conclusão

Com objetivo de estudar as propriedades de transmissão e rotação Faraday, várias configurações de grades magnetoópticas estratificadas foram analisadas, considerando diversas combinações materiais e um número máximo de quatro descontinuidades.

A utilização do método dos elementos finitos apresentou-se como ferramenta bastante flexível, permitindo uma solução com excelente precisão com o mínimo esforço computacional. Convém ressaltar que as respostas obtidas utilizando funções lineares apresentaram um deslocamento da resposta em relação ao comprimento de onda central de operação. A correção desse comportamento foi obtida utilizando-se funções de base quadráticas. Desta forma, os resultados, obtidos a partir do código baseado no método dos elementos finitos, mostraram excelente concordância com os obtidos por Steel [13] e Levy [20], que se utilizaram de uma aproximação senoidal para o perfil dielétrico e da teoria de modos acoplados. Além disso, uma análise também mostrou que a estrutura é bastante sensível a variações na espessura das lâminas que compõem as células, admitindo um erro máximo de 0,1% na espessura das lâminas para uma boa resposta espectral.

Capítulo 5

Conclusões

Os esforços despendidos durante este trabalho tiveram o objetivo de estudar as propriedades espectrais de grades anisotrópicas, especialmente as características de transmissão e o efeito magnetoóptico exercido sobre o plano de polarização da luz transmitida através dessas estruturas. Para tanto, foi utilizado um modelo matemático, não disponível na literatura, que decompõe a equação de onda em termos de suas componentes transversal e axial à direção propagação, originando um sistema de equações escalares, acopladas através dos campos magnéticos transversais. Este sistema de equações, juntamente com as condições de contorno, obtidas a partir de um formalismo vetorial entre fronteiras anisotrópicas, permitiu o desenvolvimento direto de códigos baseados no método dos elementos finitos no domínio da frequência. Ao contrário das técnicas semi-analíticas utilizadas anteriormente [14] – [20], a plataforma computacional desenvolvida possibilita analisar com precisão estruturas com qualquer tipo de perfil dielétrico (degrau, senoidal, etc.), possibilitando, com esforço computacional desprezível, implementar estruturas com qualquer quantidade de células e descontinuidades, além de qualquer composição material desejada, possibilidades até o momento não registradas na literatura. Esta plataforma foi validada através da reprodução dos resultados obtidos por Steel *et al.* [13] e Inoue *et al.* [15].

Os resultados obtidos no Capítulo 4 mostram que as grades construídas do composto GGG/Bi:YIG, embora apresentem alta transmissividade e menor sensibilidade às características construtivas, possuem uma rotação Faraday bastante baixa, quando comparadas às grades equivalentes, construídas com o composto GGG/Ce:YIG. Embora as Figuras 4-4 a 4-6 ilustrem este comportamento para estrutura com uma descontinuidade, o mesmo foi observado em grades complexas, com duas ou mais descontinuidades. As simulações feitas a partir dos compostos SiO₂/Ce:YIG ou SiO₂/Bi:YIG apresentaram um desempenho bastante inferior, quando comparados aos resultados obtidos com os compostos GGG/Ce:YIG.

Embora apresentem expressiva elevação da rotação Faraday, em relação aos cristais construídos com um único material magnetoóptico, as estruturas com apenas uma descontinuidade apresentam baixa transmissividade e uma rígida dependência inversa entre o efeito magnetoóptico e a transmissividade.

Desta forma é impossível otimizar sua resposta espectral para operar com alta transmissividade e rotação Faraday de valor expressivo. O relaxamento desta dependência, além do alargamento da banda de transmissão, pode ser alcançado através de cristais construtivamente mais sofisticados, isto é, com um maior número de descontinuidades. Isto pode ser observado nas Figuras 4-15 e 4-20, onde os resultados apontam para um desempenho superior (rotação Faraday e largura de faixa) das estruturas com um maior número de descontinuidades. Contudo, os estudos indicaram que o aumento do número de descontinuidades reduz a transmitância do conjunto. Neste ponto, existe uma divergência em relação aos resultados apresentados por Levy *et al.* [20], que mostra a amplitude da transmitância como um parâmetro praticamente independente do número de células.

Embora as construções assimétricas não apresentem efeitos relevantes, quando implementadas em grades com um ou duas descontinuidades, a assimetria pode ser utilizada para ajustar a rotação Faraday e otimizar a largura de faixa em estruturas de maior complexidade, sem comprometer a transmitância, como mostram as Figuras 4-18 e 4-19.

Todos os resultados apresentados neste trabalho indicam ser possível, utilizando uma configuração adequada, obter uma estrutura magnetoóptica, de dimensões micrométricas, que apresente alta transmissividade e uma rotação Faraday em torno de 45 graus. Mesmo as construções mais sofisticadas, possuem dimensões bastante reduzidas quando comparadas às estruturas milimétricas construídas de um único material magnético, como pode ser constatado nas estruturas (14, 29, 29, 14) e (12, 26, 28, 26, 12), que possuem comprimentos de 32,77 μm e 39,63 μm , respectivamente.

Todas as arquiteturas analisadas apresentam uma forte dependência da resposta espectral em relação aos parâmetros construtivos. Esta dependência é observada tanto no efeito que o número de células exerce sobre a rotação Faraday, quanto na influência do número de descontinuidades sobre a transmitância (amplitude e ondulação) e largura de faixa. Em virtude do grande número de variáveis envolvidas no projeto, a otimização da resposta espectral pode se constituir um processo extremamente complexo. Contudo, devido à sua flexibilidade, a plataforma computacional desenvolvida pode ser acoplada a programas que permitam otimizar arquiteturas de complexidade ainda não estudadas.

Como extensão natural deste trabalho, sugere-se a utilização do código desenvolvido neste trabalho acoplado ao programa baseado em algoritmos genéticos, desenvolvido no Departamento de Microonda e Óptica da FEEC/UNICAMP, para a otimização de grades magnetoópticas com elevado grau de complexidade. Atualmente está sendo desenvolvido um programa baseado no método das diferenças finitas no domínio do tempo em duas dimensões (FDTD-2D), com objetivo de estudar a propagação de sinais ópticos em guias magnetoópticos estratificados.

Referências

- [1] S. Kawanishi, “High Bit Rate Transmission Over 1 Tbit/s”, *IEICE Transactions Electronics*, vol. E-84-C, no. 5, pp. 509-515, maio 2001.
- [2] S. Araki *et al.*, “Photonic Core Node Based On a 2,56 Terabit/s Optoelectronic Switching Fabric”, *IEICE Transactions Electronics*, vol. E-84-B, no. 5, pp. 1111-1118, maio 2001.
- [3] A. E. Willner *et al.*, “Key Building Blocks For All-optical Networks”, *IEICE Transactions Electronics*, vol. E-83-B, no. 10, pp. 2178-2190, outubro 2001.
- [4] Y. Hibino, “Passive Optical Devices For Photonic Network”, *IEICE Transactions Electronics*, vol. E-83-B, no. 10, pp. 2178-2190, outubro 2001.
- [5] J. Fujita *et al.*, “Observation of optical isolation based on nonreciprocal phase shift in a Mach Zehnder interferometer”, *Applied Physics Letter*, vol. 75, pp. 998-1000, 1999.
- [6] N. Sugimoto *et al.*, “A Hybrid Integrated Waveguide Isolator on a Silica-Based Planar Lightwave Circuit”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 14, no. 11, pp. 2537-2546, novembro 1996.
- [7] J. Fujita, M. Levy, R. M. Osgood Jr., L. Wilkens e H. Dötsch, “Polarization-Independent Waveguide Optical Isolator Based on Nonreciprocal Phase Shift”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 12, No. 11, pp. 1510-1512, novembro 2000.
- [8] E. Pross, W. Tolkdorf e H. Dammann, “Yttrium Iron Garnet Single-Mode Buried Channel Waveguide for Waveguides Isolators”, *Applied Physics Letters*, no. 52 (9), pp. 682-684, fevereiro 1998.
- [9] M. Levy *et al.*, “Permanent Magnet film Magneto-optic Waveguide Isolator”, *Journal Applied Physics*, no. 75 (10), pp. 6286-6288, maio 1994.
- [10] M. Shirasaki, H. Kuwahara e T. Obolata, “Compact Polarization-Independent Optical Circulator”, *Applied Optics*, vol. 20, no. 15, pp. 2683-2687, agosto 1981.
- [11] N. Bahlmann *et al.*, “Nonreciprocal Coupled Waveguides for Integrated Optical Isolators and Circulators for TM-Modes”, *Optics Communications*, no. 161, pp. 330-337, março 1999.

- [12] H. Nishihara, M. Haruna, e T. Suhara, “Optical Integrated Circuits”, *McGraw-Hill Book Company*, Cap. 5, New York, 1985.
- [13] M. J. Steel, M. Levy e R. M. Osgood Jr., “High Transmission Enhanced Faraday Rotation in One-Dimensional Photonic Crystals with Defects”, *Journal of Lightwave and Technology*, Vol. 18, No. 9, pp.1171-1173, setembro 2000.
- [14] M. Inoue e T. Fujii, “A Theoretical Analysis of Magneto-Optical Faraday Effect of YIG Films with Random Multilayer Structures ”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 81, No. 8, pp. 5659-5661, abril 1997.
- [15] M. Inoue, K. Arai, T. Fujii e M. Abe, “Magneto-optical Properties of One Dimensional Photonic Crystals Composed of Magnetic and Dielectric Layers”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 83, No. 11, pp. 6768-6770, junho 1998.
- [16] . Inoue, K. Arai, T. Fujii e M. Abe, “One-Dimensional Magnetophotonic Crystals”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 85, No. 8, pp. 5768-5770, junho 1999.
- [17] S. Sakaguchi e N. Sugimoto, “Transmission Properties of Multilayer Films Composed of Magneto-Optical and Dielectric Materials”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, no. 17, pp. 1087-1092, junho 1999.
- [18] M. J. Steel, M. Levy e R. M. Osgood Jr., “Photonic Bandgaps with Defects and the Enhancement of Faraday Rotation”, *Journal of Lightwave and Technology*, Vol. 18, No. 9, pp.1297-1308, setembro 2000.
- [19] M. J. Steel, M. Levy e R. M. Osgood Jr., “Large Magneto-optical Kerr Rotation with High Reflectivity from Photonic Bandgap Structures with Defects”, *Journal of Lightwave and Technology*, Vol. 18, No. 9, pp.1289-1296, setembro 2000.
- [20] M. Levy, “Flat-Top Response in One-Dimensional Magnetic Photonic Bandgap Structures with Faraday Rotation Enhancement”, *Journal of Lightwave and Technology*, Vol. 19, No. 12, pp.1964-1969, dezembro 2001.
- [21] Jianming Jin, “The Finite Element Method in Electromagnetic”, *John Wiley and Sons, Inc.*, 1993.
- [22] M. Koshiba, “Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method”, *Kluwer Academic Publishers*, London, 1992.
- [23] C. T. Tai, “Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory”, *IEEE Press*, 1994.
- [24] L. Wei e J. W. Y. Lit, “Phase-shifted Bragg Grating Filters with Symmetrical Structures”, *Journal of Lightwave and Technology*, Vol. 15, No. 8, pp.1405-1410, agosto 1997.

- [25] C. A. Balanis, “Advanced Engineering Electromagnetics”, *John Wiley and Sons, Inc.*, 1989.
- [26] J. P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [27] H. S. Sozuer, J. W. Haus e R. Inguva “Photonic Bands: Convergence Problems with the Plane-Wave Method”, *Physical Review B*, Vol. 45, No. 24, pp. 13962-13972, junho 1992.
- [28] V. Mathis, “An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium in Finite Element Time Domain Method for Maxwell’s Equations”, *Digest of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Vol.2, pp. 680-683, 1997.
- [29] R. Wolfe *et al.*, “Etch-Tuned Rigid Waveguide Magneto-Optic Isolator”, *Applied Physics Letter*, no. 56 (5), pp. 426-428, janeiro 1990.
- [30] M. Levy e R. M. Osgood Jr., “Epitaxial Liftoff of Thin Oxide Layers: Yttrium Iron Garnet Onto GaAs”, *Applied Physics Letter*, no. 71 (18), pp. 2617-2619, novembro 1997.
- [31] F. J. Rachford *et al.*, “Magnetization on Ferromagnetic Resonance Studies in Implanted and Crystal Iron Scliced Bismuth-substituted Yttrium Iron Garnet Films”, *Journal of Applied Physics Letter*, vol. 85, no. 8, pp. 5217-5219, abril 1990.
- [32] M. Levy, “The On-Chip Integration of Magneto-optic Waveguide Isolators”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 8, no. 6, pp. 1300-1306, novembro/dezembro 2002.
- [33] N. Sugimoto *et al.*, “Waveguide Polarization-Independent Optical Circulator”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 11, no. 3, pp. 355-357, março 1999.
- [34] Y. Ohkawa, Y. Tsuji e M. Koshiba, “Analysis of Anisotropic Dielectric Grating Diffraction Using the Finite-Element Method”, *Journal of Optical Society of America A*, vol. 13, no. 5, pp. 1006-1012, maio 1996.
- [35] A. Erdmann e P. Hertel, “Beam-Propagation in Magneto-optic Waveguides”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 31, no.8, pp. 1510-1516, agosto 1995.
- [36] J. Ctyroký, “Photonic Bandgap Structures in Planar Waveguides”, *Journal of Optical Society of America A*, vol. 18, no. 2, pp. 435-441, fevereiro 2001.
- [37] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade e J. N. Winn, “Photonic Crystals: Molding the Flow of Light”, *Princeton University Press*, 1995.
- [38] K. Sakoda, “Optical Properties of Photonic Crystals”, *Springer-Verlag*, 2001.
- [39] S. E. Koonin e D. C. Meredith, “Computational Physics – Fortran Version”, *Addison-Wesley Publishing Company*, 1990.

[40] A. Yariv e P. Yeh, “Optical Waves in Crystals”, *John Wiley & Sons*, 1984.

Apêndice A

Relação entre os Campos Elétrico e Magnético

Sejam as leis de Faraday e Ampère descritas de forma compacta como,

$$\bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{f} = \xi_0 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}. \quad (\text{A.1})$$

Para a lei de Faraday, tem-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}, \quad (\text{A.2b})$$

$$\xi_0 = -\mu_0, \quad (\text{A.2c})$$

$$\bar{\bar{\zeta}}_r = \bar{\bar{\theta}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_r}; \quad (\text{A.2d})$$

e para a lei de Ampère,

$$\mathbf{f} = \mathbf{h}, \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\xi_0 = \epsilon_0, \quad (\text{A.3c})$$

$$\bar{\bar{\zeta}}_r = \bar{\bar{\phi}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\epsilon}}_r}. \quad (\text{A.3d})$$

Usando a equação (3.11), e separando as contribuições nas direções transversal e axial, a equação (A.1) pode ser escrita como

$$\bar{\bar{\zeta}}_T \nabla_T \times \mathbf{f}_k + \bar{\zeta}'_{ji} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_T = \xi_0 \frac{\partial \mathbf{g}_T}{\partial t}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\bar{\zeta}_{kk} \nabla_T \times \mathbf{f}_T + \bar{\zeta}'_{ij} \times \nabla_T \times \mathbf{f}_k = \xi_0 \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t}, \quad (\text{A.4b})$$

onde $\bar{\bar{\zeta}}_T$, ζ'_{ij} , ζ'_{ji} foram definidos nas equações (3.7b), (3.13a) e (3.13b), respectivamente.

Para guias unidimensionais, as equações (A.4a)-(A.4b) se reduzem a

$$-\zeta_{ik}\frac{\partial f_i}{\partial j} + \zeta_{ii}\frac{\partial f_k}{\partial j} = \xi_0\frac{\partial g_i}{\partial t}, \quad (\text{A.5a})$$

$$-\zeta_{jk}\frac{\partial f_i}{\partial j} + \zeta_{ji}\frac{\partial f_k}{\partial j} = \xi_0\frac{\partial g_j}{\partial t}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\zeta_{kk}\frac{\partial f_i}{\partial j} - \zeta_{ki}\frac{\partial f_k}{\partial j} = \xi_0\frac{\partial g_k}{\partial t}. \quad (\text{A.5c})$$

Por outro lado, em um domínio livre de fontes, a lei de Gauss pode ser escrita de forma compacta como,

$$\nabla \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{f} \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Para a lei de Gauss elétrica, tem-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\bar{\bar{\xi}}_r = \bar{\bar{\epsilon}}_r, \quad (\text{A.7b})$$

enquanto que, para a lei de Gauss magnética,

$$\mathbf{f} = \mathbf{h}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\bar{\bar{\xi}}_r = \bar{\bar{\mu}}_r. \quad (\text{A.8b})$$

Assim, para meios dielétricos anisotrópicos e não-magnéticos

$$\nabla \cdot \left(\bar{\bar{\epsilon}}_r \mathbf{e} \right) = 0, \quad (\text{A.9a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (\text{A.9b})$$

Apêndice B

Caracterização dos Campos nas Regiões Anterior e Posterior

A Figura B-1 mostra a interface de separação entre os meios A e B, sobre a qual incide uma onda eletromagnética composta dos campos \mathbf{E}_{\perp}^i e \mathbf{E}_{\parallel}^i , provocando o aparecimento dos campos refletidos \mathbf{E}_{\perp}^r , \mathbf{E}_{\parallel}^r .

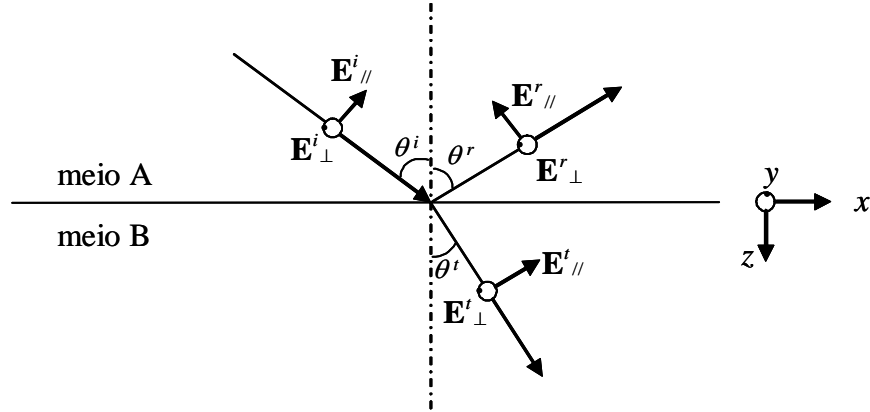


Figura B-1: Onda linearmente polarizada composta de duas ondas circularmente polarizadas.

B.1 Campos na Região Anterior ($z < 0$)

Os campos elétrico e magnético, que definem a onda na região ($z < 0$) são compostos pelos componentes incidentes e refletidos, especificados por Balanis [25]. Assumindo que a onda incide perpendicularmente na fronteira, isto é, $\theta^i = 0$, os campos incidentes e refletidos podem ser escritos

como,

$$\mathbf{E}_{\parallel}^i = \hat{x} \frac{E_{0\parallel}}{2} \exp(-\gamma z), \quad (\text{B.10a})$$

$$\mathbf{E}_{\perp}^i = \hat{y} \frac{E_{0\perp}}{2} \exp(-\gamma z + j\phi), \quad (\text{B.10b})$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^i = \hat{y} \frac{H_{0\parallel}}{2} \exp(-\gamma z), \quad (\text{B.10c})$$

$$\mathbf{H}_{\perp}^i = -\hat{x} \frac{H_{0\perp}}{2} \exp(-\gamma z + j\phi), \quad (\text{B.10d})$$

e

$$\mathbf{E}_{\parallel}^r = \hat{x} R \frac{E_{0\parallel}}{2} \exp(\gamma z), \quad (\text{B.11a})$$

$$\mathbf{E}_{\perp}^r = \hat{y} R \frac{E_{0\perp}}{2} \exp(\gamma z + j\phi), \quad (\text{B.11b})$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^r = -\hat{y} R \frac{H_{0\parallel}}{2} \exp(\gamma z), \quad (\text{B.11c})$$

$$\mathbf{H}_{\perp}^r = \hat{x} R \frac{H_{0\perp}}{2} \exp(\gamma z + j\phi), \quad (\text{B.11d})$$

onde :

$E_{0\perp}$: amplitude do campo elétrico incidente com polarização perpendicular (V/m);

$E_{0\parallel}$: amplitude do campo elétrico incidente com polarização paralela (V/m);

$H_{0\perp}$: amplitude do campo magnético incidente com polarização perpendicular (A/m);

$H_{0\parallel}$: amplitude do campo magnético incidente com polarização paralela (A/m);

R : coeficiente de reflexão da onda;

γ : constante de propagação no meio (1/m);

ϕ : ângulo de fase que define a polarização circular da onda.

A onda que se propaga na região $z < 0$ é a combinação linear duas ondas circularmente polarizadas no sentido horário (polarização positiva) e anti-horário (polarização negativa) [12] e, portanto, $E_{0\perp} = E_{0\parallel} = E_0$ e $H_{0\perp} = H_{0\parallel} = H_0$. Os campos magnéticos incidente e refletido com polarização horária – $\phi = \frac{\pi}{2}$, podem ser escritos como

$$\mathbf{H}_x^+ \Big|_i = -j \frac{H_0}{2} \exp(-\gamma_1^+ z) \hat{x}, \quad (\text{B.12a})$$

$$\mathbf{H}_y^+ \Big|_i = \frac{H_0}{2} \exp(-\gamma_1^+ z) \hat{y}, \quad (\text{B.12b})$$

$$\mathbf{H}_x^+ \Big|_r = j R \frac{H_0}{2} \exp(\gamma_1^+ z) \hat{x}, \quad (\text{B.12c})$$

$$\mathbf{H}_y^+ \Big|_r = -R \frac{H_0}{2} \exp(\gamma_1^+ z) \hat{y}. \quad (\text{B.12d})$$

Para polarização anti-horária – $\phi = -\frac{\pi}{2}$, tem-se

$$\mathbf{H}_x^- \Big| ^i = j \frac{H_0}{2} \exp(-\gamma_1^- z) \hat{x}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathbf{H}_y^- \Big| ^i = \frac{H_0}{2} \exp(-\gamma_1^- z) \hat{y}, \quad (\text{B.13b})$$

$$\mathbf{H}_x^- \Big| ^r = -jR \frac{H_0}{2} \exp(\gamma_1^- z) \hat{x}, \quad (\text{B.13c})$$

$$\mathbf{H}_y^- \Big| ^r = -R \frac{H_0}{2} \exp(\gamma_1^- z) \hat{y}. \quad (\text{B.13d})$$

Desta forma, o campo incidente total, linearmente polarizado na direção y , pode ser escrito como

$$\mathbf{H}^i(z) = \mathbf{H}_x^i(z) + \mathbf{H}_y^i(z)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x^i(z) &= \mathbf{H}_x^+(z) \Big| ^i + \mathbf{H}_x^-(z) \Big| ^i, \\ \mathbf{H}_y^i(z) &= \mathbf{H}_y^+(z) \Big| ^i + \mathbf{H}_y^-(z) \Big| ^i. \end{aligned}$$

Combinando as equações (B.12a) a (B.12d), tem-se

$$H_x^i(z) = j \frac{H_0}{2} [-\exp(-\gamma_1^+ z) + \exp(-\gamma_1^- z)], \quad (\text{B.14a})$$

$$H_y^i(z) = \frac{H_0}{2} [\exp(-\gamma_1^+ z) + \exp(-\gamma_1^- z)], \quad (\text{B.14b})$$

onde γ_1^+ e γ_1^- são as constantes de propagação das ondas circularmente polarizadas no sentido horário (+) e anti-horário (-), respectivamente, e definidas por Nishihara [12].

Da mesma forma, o campo total refletido pode ser escrito como

$$\mathbf{H}(z)^r = \mathbf{H}(z)_x^r + \mathbf{H}(z)_y^r$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x^r(z) &= \mathbf{H}_x^+(z) \Big| ^r + \mathbf{H}_x^-(z) \Big| ^r, \\ \mathbf{H}_y^r(z) &= \mathbf{H}_y^+(z) \Big| ^r + \mathbf{H}_y^-(z) \Big| ^r. \end{aligned}$$

Combinando as equações (B.13a)-(B.13d), obtém-se

$$H_x^r(z) = jR \frac{H_0}{2} [\exp(\gamma_1^+ z) - \exp(\gamma_1^- z)], \quad (\text{B.15a})$$

$$H_y^r(z) = -R \frac{H_0}{2} [\exp(\gamma_1^+ z) + \exp(\gamma_1^- z)]. \quad (\text{B.15b})$$

O campo magnético total na região $z < 0$ é escrito como a combinação dos campos incidente e refletivo e caracterizado pelo sobrescrito 1,

$$\mathbf{H}^1 = H_x^1(z) \hat{x} + H_y^1(z) \hat{y},$$

onde

$$H_x^1(z) = j \frac{H_0}{2} \{ [-\exp(-\gamma_1^+ z) + R \exp(\gamma_1^+ z)] + [\exp(-\gamma_1^- z) - R \exp(\gamma_1^- z)] \}, \quad (\text{B.16a})$$

$$H_y^1(z) = \frac{H_0}{2} \{ [\exp(-\gamma_1^+ z) - R \exp(\gamma_1^+ z)] + [\exp(-\gamma_1^- z) - R \exp(\gamma_1^- z)] \}. \quad (\text{B.16b})$$

A partir de (B.16a)-(B.16b), as derivadas direcionais dos campos $H_x^1(z)$ e $H_y^1(z)$ podem, finalmente, ser obtidas e definidas como

$$\frac{\partial H_x^1(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ H_x^1(z) - j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- H_y^1(z) + j H_0 [\gamma_1^+ \exp(-\gamma_1^+ z) - \gamma_1^- \exp(\gamma_1^- z)], \quad (\text{B.17a})$$

$$\frac{\partial H_y^1(z)}{\partial z} = j \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^- H_x^1(z) + \frac{1}{2} \Delta \gamma_1^+ H_y^1(z) + H_0 [\gamma_1^+ \exp(-\gamma_1^+ z) + \gamma_1^- \exp(\gamma_1^- z)], \quad (\text{B.17b})$$

onde

$$\Delta \gamma_1^+ = \gamma_1^+ + \gamma_1^-, \quad (\text{B.18a})$$

$$\Delta \gamma_1^- = \gamma_1^+ - \gamma_1^-. \quad (\text{B.18b})$$

B.2 Campos na Região Posterior ($z > L$)

Da mesma forma que na seção acima, o campo magnético na região ($z > L$) será escrito em função dos campos circularmente polarizados no sentido horário e anti-horário e caracterizado pelo sobrescrito 3, conforme abaixo

$$\mathbf{H}^3 = H_x^3(z) \hat{x} + H_y^3(z) \hat{y},$$

sendo

$$H_x^3(z) = j H^t \{ \exp[-\gamma_3^-(z-L)] - \exp[-\gamma_3^+(z-L)] \}, \quad (\text{B.19a})$$

$$H_y^3(z) = H^t \{ \exp[-\gamma_3^-(z-L)] + \exp[-\gamma_3^+(z-L)] \}, \quad (\text{B.19b})$$

onde H^t é a amplitude do campo transmitido na fronteira e γ_3^+ e γ_3^- as constantes de propagação das ondas circularmente polarizadas no sentido horário (+) e anti-horário (-), respectivamente.

A partir das equações (B.19a) e (B.19b) as derivadas direcionais dos campos $H_x^3(z)$ e $H_y^3(z)$ podem

ser obtidas e expressas na forma

$$\frac{\partial H_x^3(z)}{\partial z} = -\frac{1}{2}\Delta\gamma_3^+ H_x^3(z) + j\frac{1}{2}\Delta\gamma_3^- H_y^3(z), \quad (\text{B.20a})$$

e

$$\frac{\partial H_y^3(z)}{\partial z} = -j\frac{1}{2}\Delta\gamma_3^- H_x^3(z) - \frac{1}{2}\Delta\gamma_3^+ H_y^3(z), \quad (\text{B.20b})$$

onde

$$\Delta\gamma_3^+ = \gamma_3^+ + \gamma_3^-, \quad (\text{B.21a})$$

$$\Delta\gamma_3^- = \gamma_3^+ - \gamma_3^-. \quad (\text{B.21b})$$

*"Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive."*

Fernando Pessoa